

非线性随机动力学与控制的哈密顿理论体系及其应用

朱位秋

浙江大学力学系

摘要

本文主要介绍近十几年来在非线性随机动力学与控制哈密顿理论体系方面的研究成果,包括高斯白噪声激励下耗散的哈密顿系统的精确平稳解与等效非线性系统法,拟哈密顿系统随机平均法,拟哈密顿系统的随机稳定性、随机分岔、首次穿越及非线性随机最优控制理论方法,同时也简要介绍与之相关的非线性随机动力学的一般发展,并指出若干今后有待进一步研究的问题。

1 引言

随机动力学源于一世纪前对布朗运动定量描述的研究。上世纪 40、50 年代,先后发展了通信工程中的随机噪声理论,航空航天与机械等工程中的随机振动,土木与海洋等工程中随机结构动力学。自上世纪 60 年代开始,理论研究主要转向非线性系统的随机响应,随机稳定性及随机最优控制。虽然在这些方面也已取得很大的进步[1-23],但在多自由度强非线性系统的随机动力学与控制方面进展甚微。

过去十几年中,本人与其合作者将非线性随机动力学系统表为随机激励的耗散的哈密顿系统,并按相应哈密顿系统的可积性与共振性将系统分成不可积、可积非共振、可积共振、部分可积非共振、部分可积共振五类,提出与发展了随机激励的耗散的哈密顿系统理论,包括高斯白噪声激励下耗散的哈密顿系统的五类精确平稳解与等效非线性系统法,拟哈密顿系统随机平均法,拟哈密顿系统的随机稳定性、随机分岔、首次穿越及非线性随机最优控制理论方法。上述研究成果构成了一个非线性随机动力学与控制的哈密顿理论体系,为解决多自由度强非线性系统的随机动力学与控制这个极为困难的问题提供了一系列崭新而有效的理论方法[24],本文中理论方法也适用于拟线性系统与线性系统。本文着重介绍这方面的研究成果。

*本文是在发表于 ASME Applied Mechanics Reviews, July 2006,59:230-248 的 Nonlinear stochastic dynamics and control in Hamiltonian formulation 与发表于马兴瑞主编《动力学、振动与控制新进展》(北京,中国宇航出版社,2006)一书中“非线性随机动力学与控制的哈密顿理论体系”基础上补充修改而成。感谢吴禹博士协助补充修改。本文得到国家自然科学基金项目 10772159 的资助。

2 非线性随机动力学系统的哈密顿提法和分类

一个 n 自由度受控的非线性随机动力学系统可用下述 n 对方程描述:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H}{\partial Q_i} - c_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j} + u_i + f_{ik} \xi_k(t) \\ i, j &= 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m\end{aligned}\quad (1)$$

式中 Q_i 、 P_i 分别为广义位移与广义动量 $\mathbf{Q}=[Q_1, Q_2, \dots, Q_n]^T$, $\mathbf{P}=[P_1, P_2, \dots, P_n]^T$; $H=H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 为具有连续偏导数的哈密顿函数; $c_{ij}=c_{ij}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 表示拟线性阻尼系数; $f_{ik}=f_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 表示随机激励幅值; $\xi_k(t)$ 为随机过程, 特殊情形下包括概周期、同期或谐和函数; $u_i=u_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 表示反馈控制力。(1)所描述的系统为受控的、随机激励的、耗散的哈密顿系统。注意, 本文中采用了 Einstein 求和规则。

系统(1)的核心是相应的哈密顿系统, 它可用下列哈密顿方程描述:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

此处假定哈密顿系统是自治的, 用哈密顿函数 $H=H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 表征。对机械/结构系统, 哈密顿函数表示系统的总能量, 它在系统运动过程中守恒。一个动力学量 $H_i = H_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 称为首次积分(运动积分, 或守恒量), 若 $[H_i, H]=0$; 两个首次积分 H_i 与 H_j 称为对合, 若 $[H_i, H_j]=0$, 其中

$$[H_i, H_j] = \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial H_j}{\partial q_k} - \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \frac{\partial H_j}{\partial p_k}, \quad i, j = 1, 2, \dots, r; k = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

为 H_i 和 H_j 的泊松括号。哈密顿系统可按独立、对合的首次积分 $H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \dots, H_r(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 的个数进行分类[25]。若 $r=1$, 称该哈密顿系统为不可积的; 若 $r=n$, 称该哈密顿系统为(完全)可积的, 若 $1 < r < n$, 则称该哈密顿系统为部分可积的。

对可积哈密顿系统, 原则上可引入作用角变量 I_i 与 $\theta_i, i=1, 2, \dots, n$ 。籍此, 哈密顿函数可表为 $H=H(\mathbf{I}), \mathbf{I}=[I_1, I_2, \dots, I_n]^T$ 。而可积哈密顿系统的运动方程为

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H(\mathbf{I})}{\partial I_i} = \omega_i(\mathbf{I}), \quad \dot{I}_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4)$$

式中 $\omega_i(\mathbf{I})$ 为该哈密顿系统的 n 个频率。方程(4)之解为

$$I_i = \text{const}, \quad \theta_i = \omega_i(\mathbf{I})t + \delta_i \quad i=1, 2, \dots, r \quad (5)$$

式中 δ_i 为积分常数。注意，作用角变量为全局变量，方程(4)与(5)适用于整个相空间，这一点对研究多自由度强非线性系统的随机动力学很重要。一个可积哈密顿系统称为共振的，若至少存在一个如下的共振关系：

$$k_i^u \omega_i(\mathbf{I}) = 0, i = 1, 2, \dots, n; u = 1, 2, \dots, \alpha \quad (6)$$

式中 k_i^u 为整数，对固定的 u 不全为零；否则，可积哈密顿系统称为非共振的。

部分可积哈密顿系统这一概念乃由作者为研究随机激励的耗散的哈密顿系统而引入的，原则上，一个部分可积哈密顿系统可用正则变换变成一个由一个可积与一个不可积哈密顿子系统组成的系统，前者具有首次积分 $H_1(q_1, p_1), H_2(q_2, p_2), \dots, H_{r-1}(q_{r-1}, p_{r-1})$ ，或 $H_1(I_1), H_2(I_2), \dots, H_{r-1}(I_{r-1})$ ，后者的哈密顿函数为 $H_r(q_r, \dots, q_n; p_r, \dots, p_n)$ 。因此，一个部分可积哈密顿系统也可是非共振或共振的，取决于可积哈密顿子系统是共振的还是非共振的。

于是，按其可积性与共振性，哈密顿系统又可分成五类：不可积、可积非共振、可积共振、部分可积非共振、部分可积共振。不同类的哈密顿系统的性态是不同的，例如，可积非共振哈密顿系统的运动是概周期的，单个轨线最终均匀覆盖 n 维环面。不可积哈密顿系统在能量达到一定值后运动是混沌的，并在 $2n-1$ 维等能量椭球面上遍历。

迄今，尚无识别哈密顿系统是否可积的一般方法，但有一些识别特殊类型哈密顿系统可积性方法，如 Hamilton-Jacobi 法[26,27]，Lax 对法[26,27]，Painlevé 奇性分析法[25,28]，Whittaker 可积势[29]，Poincare 映射法[30]。

方程(1)所描述的受控的、随机激励的耗散的哈密顿系统也可按其相应哈密顿系统的可积性与共振性分成五类。这一分类极为重要，因为已证明系统的精确与近似平稳解的泛函形式取决于相应哈密顿系统的可积性与共振性。应指出，非线性随机动力学系统的哈密顿提法最早由 Fuller[31]给出，也曾为 Soize [7]与 Zhu 等[32,33]用于得到精确平稳解，但他们没有对系统按可积性与共振性进行分类，因此，他们只能得到能量等分的精确平稳解，而得不到能量非等分的精确平稳解。

上述哈密顿系统都是有限偶数维的，常称为经典哈密顿系统。然而许多学科中的保守系统是奇数维或无穷维的。为使哈密顿系统理论应用于这些情形，提出了广义哈密顿系统概念。此外，具有某些对称性的经典哈密顿系统可约化为较低维数的广义哈密顿系统，例如，三自由度刚体定点运动的 Euler 情形可约化为三维广义哈密顿系统。自 20 世纪 50 年代以来，广义哈密顿系统理论已取得重要进展，此处只考虑有限维广义哈密顿系统。

以 $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ 表示状态变量。一个 m 维广义哈密顿系统可用如下方程描述

$$\dot{x}_i = [x_i, H] = J_{ij}(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

式中 $H(x)$ 为哈密顿函数, $[F, G]$ 为 F 与 G 的泊松括号

$$[F, G] = J_{ij}(x) \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} \quad (8)$$

$J_{ij}(x)$ 为结构矩阵 $\mathbf{J}(x)$ 的元素, 当它满足 Darboux 定理条件时, 运动方程可化为

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad \dot{z}_s = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n; s = m - 2n \quad (9)$$

与经典哈密顿方程(2)相比, 仅多了最后一个方程。 Z_s 常称为 Casimir 函数。

类似于经典哈密顿系统, 广义哈密顿系统也可按可积性与共振性分成不可积, 可积非共振, 可积共振, 部分可积非共振, 部分可积共振五类。各类系统的运动性态比相应各类经典哈密顿系统稍复杂, 但在辛叶(Z_s 为常数)上是一样的。

类似于系统(1), 可研究受控的、随机激励的、耗散的广义哈密顿系统, 其运动方程形为:

$$\dot{X}_i = [X_i, H] - c_{ij} \frac{\partial H}{\partial X_j} + u_i + f_{ik} \xi_k(t) \quad (10)$$

3 精确平稳解

一个动力学系统对高斯白噪声的响应是一个扩散(马尔柯夫)过程, 其转移概率密度由 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程支配。获得随机激励的非线性动力学系统的精确平稳解的唯一途径是在适当的边初值条件下推导与求解 FPK 方程。只有对很特殊的一维非线性系统可得 FPK 方程的精确瞬态解[34]。对二维与高维非线性系统, 只对若干类系统得到精确平稳解。早期的精确平稳解结果可在 Fuller 的综述[31]中找到。1980、1990 年代, 在这方面取得了很多进步[7, 35-39]。直到 1990 年代初, 所有得到的多自由度非线性随机系统精确平稳解都与古典统计力学中的 Maxwell-Boltzmann 分布紧密相关, 都具有能量在多自由度之间等分的性质。对随机激励的耗散的哈密顿系统, 这一性质表现为平稳概率密度是哈密顿的函数。另一方面, 多自由度线性系统在高维白噪声外激下的精确平稳解为高斯的, 具有能量非等分性质。这两类解的不一致性由在多自由度非线性随机系统的哈密顿提法中引入可积性与共振性得以克服。

考虑系统(1)的一个特殊情形, 即一个耗散的哈密顿系统受高斯白噪声激励, 其运动方

程形为

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} - c_{ij} \frac{\partial H'}{\partial P_j} + f_{ik} W_k(t) \\ i, j &= 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m\end{aligned}\quad (11)$$

式中 $W_k(t)$ 是 Stratonovich 意义上的高斯白噪声, 其相关函数为 $E[W_k(t)W_l(t+\tau)] = 2D_{kl}\delta(\tau)$. (11)

可改写成 Stratonovich 随机微分方程, 然后加上 Wong-Zakai 修正项转化成 Itô 随机微分方程。

Wong-Zakai 修正项可分成保守与耗散两部分, 并可分别与 $-\partial H' / \partial Q_i$ 和 $-c_{ij}\partial H' / \partial P_j$ 合并成有

效保守力 $-\partial H / \partial Q_i$ 和有效阻尼力 $-m_{ij}\partial H / \partial P_j$ 。完成这些步骤后, (11) 变成

$$\begin{aligned}dQ_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i} dt \\ dP_i &= -\left(\frac{\partial H}{\partial Q_i} + m_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j}\right) dt + \sigma_{ik} dB_k(t)\end{aligned}\quad (12)$$

式中 $H=H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 与 $m_{ij} = m_{ij}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 分别为变更后的哈密顿函数与阻尼系数; $B_k(t)$ 是标准 Wiener

过程; $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, $\sigma_{ik}^T = (\sigma_{ik}^T)^T$ 。由(12)知, $\mathbf{Z} = [\mathbf{Q}^T, \mathbf{P}^T]^T$ 是一个矢量扩散过程, 其转

移概率密度由 FPK 方程支配。一般得不到该 FPK 方程的精确瞬态解。因此, 此处仅考虑精

确平稳解。精确平稳概率密度由下列简化 FPK 方程支配:

$$[\rho, H] + \frac{\partial}{\partial p_i} (m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} \rho) + \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} (b_{ij}^{(i)} \rho) = 0 \quad (13)$$

式中 $b_{ij} = \sigma_{ik} \sigma_{jk}$, $b_{ij} = b_{ij}^{(i)} + b_{ji}^{(j)}$ 。方程(13)在无穷远处无概率流的边界条件下求解。

3.1 不可积情形

已证[32,33,40],若相应变更后的哈密顿系统不可积, 则(13)的精确解形为

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = C \exp[-\lambda(H)]|_{H=H(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \quad (14)$$

式中 C 为归一化常数, $\lambda(H)$ 称为概率势, 它是下列 n 个一阶线性常微分方程之解:

$$m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j} - b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{d\lambda}{dH} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

若能找到满足(15)中所有 n 个方程的一致的 $d\lambda / dH = h(H)$, 则

$$\lambda(H) = \lambda(0) + \int_0^H h(u) du \quad (16)$$

精确平稳解乃由(16)代入(14)得到。高斯白噪声激励下，两自由度振动碰撞系统的精确平稳解是这类解的一个例子[41]。

3.2 可积非共振情形[40]

若相应变更后哈密顿系统可积非共振，则方程(13)的精确解形为

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = C \exp[-\lambda(\mathbf{H})] |_{\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \quad (17)$$

式中 $\mathbf{H} = [H_1, H_2, \dots, H_n]^T$ 是相应哈密顿系统 n 个独立、对合首次积分组成的矢量， $\lambda(\mathbf{H})$ 是下列 n 个一阶线性偏微分方程之解：

$$m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_j} b_{ij}^{(i)} - b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H_s}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial H_s} = 0, \quad i, j, s = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

若可从中找到作为 H_i 的函数之解 $\partial \lambda / \partial H_s$ ，并满足下列相容性条件：

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial H_{s_1} \partial H_{s_2}} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial H_{s_2} \partial H_{s_1}}, \quad s_1, s_2 = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

则

$$\lambda(\mathbf{H}) = \lambda(\mathbf{0}) + \int_0^{H_s} \frac{\partial \lambda}{\partial u_s} du_s \quad (20)$$

(20)右边第 2 项是一个线性积分，被积函数对 $s=1, 2, \dots, n$ 求和。精确平稳解乃由(20)代入(17)得到。注意，在(17)-(20)中 \mathbf{H} 可代之以作用矢量 \mathbf{I} 。受线性与(或)非线性阻尼及高斯白噪声外激与(或)参激的线性自治哈密顿系统与耦合 Duffing 振子的精确平稳解[40]是这类解的例子。Cai and Lin [42]得到的精确平稳解是这类解的特殊情形。

3.3 可积共振情形

若相应变更后的哈密顿系统可积共振，有 α 个形如(6)的共振关系，则精确平稳解形为

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = C \exp[-\lambda(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi})] \quad (21)$$

式中 $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\alpha]^T$ ， $\psi_u = k_i \theta_i$ 为角变量组合， $\lambda(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi})$ 是下列一阶线性偏微分方程组之解：

$$m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j} - b_{ij}^{(i)} \left(\frac{\partial I_s}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial I_s} + \frac{\partial \psi_u}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial \psi_u} \right) = 0 \quad (22)$$

$$i, j, s = 1, 2, \dots, n; \quad u = 1, 2, \dots, \alpha$$

若可从中找到作为 I_i 、 ψ_u 的函数的 $\partial \lambda / \partial H_s$ 、 $\partial \lambda / \partial \psi_u$ ，且满足类似于(19)的相容性条件，则

$$\lambda(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}) = \lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + \int_0^{I_s} \frac{\partial \lambda}{\partial u_s} du_s + \int_0^{\psi_u} \frac{\partial \lambda}{\partial v_u} dv_u \quad (23)$$

精确平稳解乃由(23)代入(21)得到。鉴于 $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{I})$ ，若 \mathbf{I} 代之以 \mathbf{H} ，(21)-(23)仍适用。在线性

与(或)非线性阻尼及高斯白噪声外激与(或)参激下具有共振关系(6)的两自由度线性自治哈密顿系统的精确平稳解是这类解的例子。

3.4 部分可积非共振情形[43]

若相应变更后哈密顿系统为部分可积非共振, 有 r 个独立、对合的首次积分, 则精确平稳解形为

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = C \exp[-\lambda(\mathbf{H}_1)]|_{\mathbf{H}_1=\mathbf{H}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \quad (24)$$

式中 $\mathbf{H}_1 = [H_1, H_2, \dots, H_r]^T$, $\lambda(\mathbf{H}_1)$ 是下列 n 个一阶线性偏微分方程之解:

$$m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_j} b_{ij}^{(i)} - b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H_s}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial H_s} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad s = 1, 2, \dots, r \quad (25)$$

若可从中找到作为 H_i 函数的 $\partial \lambda / \partial H_s$, 且满足类似于(19)的相容性条件, 则

$$\lambda(\mathbf{H}_1) = \lambda(\mathbf{0}) + \int_0^{H_s} \frac{\partial \lambda}{\partial u_s} du_s, \quad s = 1, 2, \dots, r \quad (26)$$

精确平稳解乃由 (26) 代入(24)得到。若 H_1, H_2, \dots, H_r 代之以 $I_1, I_2, \dots, I_{r-1}, H_r$, 则(24)-(26)仍适用。在线性与非线性阻尼及高斯白噪声外激下的部分可积哈密顿系统的精确平稳解是这类解的例子[43]。

3.5 部分可积共振情形[43]

若相应变更后的哈密顿系统部分可积共振, 有 r 个独立、对合的首次积分, 有 β 个形如(6)的共振关系, 则精确平稳解形为:

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = C \exp[-\lambda(\mathbf{I}', H_r, \boldsymbol{\psi}')] \quad (27)$$

式中 $\mathbf{I}' = [I_1, I_2, \dots, I_{r-1}]^T, \boldsymbol{\psi}' = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\beta]^T$, $\lambda(\mathbf{I}', H_r, \boldsymbol{\psi}')$ 是下列 n 个一阶线性偏微分方程之解:

$$m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_j} b_{ij}^{(i)} - b_{ij}^{(i)} \left(\frac{\partial I_\eta}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial I_\eta} + \frac{\partial H_r}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial H_r} + \frac{\partial \psi_v}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial \psi_v} \right) = 0, \quad (28)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n; \quad \eta = 1, 2, \dots, r-1; \quad v = 1, 2, \dots, \beta$$

若可从中找到作为 I_η, H_r, ψ_v 的函数的 $\partial \lambda / \partial I_\eta, \partial \lambda / \partial H_r, \partial \lambda / \partial \psi_v$, 且满足类似于(19)的相容性条件, 则

$$\lambda(\mathbf{I}', H_r, \boldsymbol{\psi}') = \lambda(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + \int_0^{I_\eta} \frac{\partial \lambda}{\partial u_\eta} du_\eta + \int_0^{H_r} \frac{\partial \lambda}{\partial v_r} dv_r + \int_0^{\psi_v} \frac{\partial \lambda}{\partial w_v} dw_v \quad (29)$$

精确平稳解乃由(29)代入(27)得到。若 I_η 代之以 H_η , 则(27)-(29)仍适用。这类解的例子可在[43]中找到。

陀螺力通常从广义势导出，后者为哈密顿函数的一部分。上述求精确平稳解的理论步骤同时适用于非陀螺与陀螺系统[44]。也同时适用于下列更为一般的系统：

$$\begin{aligned} dQ_i &= D(Q) \frac{\partial H}{\partial P_i} dt \\ dP_i &= -[D(Q) \frac{\partial H}{\partial Q_i} + m_{ij}(Q, P) \frac{\partial H}{\partial P_j}] dt + \sigma_{ik}(Q, P) dB_k(t) \end{aligned} \quad (30)$$

式中 $D(Q)$ 为 Q 的任意函数。(30)的精确平稳解形为

$$\rho^*(q, p) = \frac{\rho(q, p)}{D(q)} \quad (31)$$

式中 $\rho(q, p)$ 是(30)在 $D(Q)=1$ 时之精确平稳解。此外，已得到一些耗散的可积哈密顿系统在谐和与高斯白噪声共同激励下的精确平稳解[45]。

应指出，解(14)具有各自由度之间能量等分的性质，阻尼与随机激励只控制系统的总能量。另一方面，解(17)、(21)、(24)及(27)，类似于线性系统在高斯白噪声外激下的解，具有能量非等分的性质，系统的能量及其在各自由度之间的分配都可由阻尼力与随机激励大小及分布控制。因此，得到能量非等分精确平稳解(17)、(21)、(24)及(27)打破了 60 多年来只有能量等分精确平稳解的局限，并使非线性随机系统的精确平稳解与在高斯白噪声外激下的线性系统的精确平稳解一致起来。

高斯白噪声激励下的耗散的哈密顿系统精确平稳解的求解理论与步骤已推广到高斯白噪声激励下的耗散的广义哈密顿系统，得到了不可积，可积非共振，可积共振，部分可积非共振，部分可积共振五种情形的精确平稳解[46]。

4 等效非线性系统法

精确平稳解的存在条件(15)、(18)、(22)、(25)、(28)及相应相容性条件常常是很严厉的限制，许多工程实际系统并不满足。然而，给定高斯白噪声激励下耗散的哈密顿系统，有可能找到具有精确平稳解的等效非线性随机系统，其性态与给定系统的性态在某种统计意义上十分接近。于是，可取等效系统的精确平稳解作为给定系统的近似的平稳解，这就是等效非线性系统法。等效非线性系统法(等效非线性微分方程法，或等效非线性化法)乃首先由 Caughey[47]提出，虽然 Lutes[48]更早将之应用于滞迟系统。1980、1990 年代，曾有许多发展[49-52]。然而，所有这些方法只适用于单自由度非线性随机系统，仅加权残数法[8]按多自由度非线性随机系统提出。

发展等效非线性系统法的前提是已有足够多精确平稳解。因此，随着有愈来愈一般的精

确平稳解，等效非线性系统法也随之发展。鉴于已得到五类多自由度随机激励的耗散的哈密顿系统的精确平稳解，也就有可能为相应的非线性随机系统发展等效非线性系统法。随机激励的耗散的哈密顿系统的等效非线性系统取决于相应哈密顿系统的可积性与共振性。已提出了三种求等效非线性系统及其精确平稳解的准则，它们是给定系统与等效系统阻尼力之差的均方值最小，两系统阻尼耗能之差均方值最小，及两系统独立、对合首次积分的时间变化率的期望相等。

设给定的高斯白噪声激励下多自由度耗散的哈密顿系统的 $I\hat{o}$ 方程形为

$$\begin{aligned} dQ_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i} dt \\ dP_i &= -\left(\frac{\partial H}{\partial Q_i} + M_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j}\right) dt + \sigma_{ik} dB_k(t) \\ i, j &= 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (32)$$

其等效非线性随机系统的 $I\hat{o}$ 随机微分方程形为(12)，它有与(32)相同的哈密顿函数与随机激励，仅阻尼系数不同。给定系统与等效系统之差为

$$\Delta_i = (m_{ij} - M_{ij}) \frac{\partial H}{\partial P_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (33)$$

它表示两系统第 i 个自由度之间阻尼力之差。

4.1 不可积情形 [53]

若具有哈密顿函数 H 的哈密顿系统为不可积，则等效非线性系统(12)将具有形为(14)的精确平稳解，方程(33)中之 m_{ij} 应满足方程(15)。于是

$$\Delta_i = [b_{ij}^{(i)} h(H) - M_{ij}] \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j} \quad (34)$$

第一个准则是

$$\min_{h(H)} E[\Delta_i \Delta_i] \quad (35)$$

它导致下列 $h(H)$ 的表达式：

$$h(H) = \frac{\int_{\Omega} [(M_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}) (b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_j} / \frac{\partial H}{\partial p_1})] d\mathbf{q} dp_2 \dots dp_n}{\int_{\Omega} [(b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_j}) (b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_j} / \frac{\partial H}{\partial p_1})] d\mathbf{q} dp_2 \dots dp_n} \quad (36)$$

第二个准则为

$$\min_{h(H)} E[\Delta_e \Delta_e] = \min_{h(H)} E[(\frac{\partial H_i}{\partial p_i} \Delta_i) (\frac{\partial H_i}{\partial p_i} \Delta_i)] \quad (37)$$

它导致下列 $h(H)$ 的表达式:

$$h(H) = \frac{\int_{\Omega} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} (M_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}) (\frac{\partial H}{\partial p_i} b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_j} / \frac{\partial H}{\partial p_i}) \right] d\mathbf{q} dp_2 \cdots dp_n}{\int_{\Omega} \left[(\frac{\partial H}{\partial p_i} b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_j}) (\frac{\partial H}{\partial p_i} b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_j} / \frac{\partial H}{\partial p_i}) \right] d\mathbf{q} dp_2 \cdots dp_n} \quad (38)$$

第三个准则为

$$E[\Delta_e] = 0 \quad (39)$$

它导致如下 $h(H)$ 的表达式:

$$h(H) = \frac{\int_{\Omega} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} (M_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}) / \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] d\mathbf{q} dp_2 \cdots dp_n}{\int_{\Omega} \left[(\frac{\partial H}{\partial p_i} b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_j}) / \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] d\mathbf{q} dp_2 \cdots dp_n} \quad (40)$$

在(36)、(38)及(40)中,

$$\Omega = \{(q_1, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n) \mid H(q_1, \dots, q_n; 0, p_2, \dots, p_n) \leq H\} \quad (41)$$

式中 $H(q_1, \dots, q_n, 0, p_2, \dots, p_n)$ 是在 $p_1 = 0$ 时的哈密顿函数, H 是哈密顿函数的某个值。将(36)、(38)或(40)中之 $h(H)$ 代入(16), 然后代入(14), 就得到等效非线性系统(12)的精确平稳解与给定系统(32)的近似平稳解。两个非线性耦合的 van der pol 振子在高斯白噪声参激下的近似平稳解就是用这一方法得到的[53]。与 Monte Carlo 模拟结果比较表明, 当非线性耦合较强与激励强度较大时, 该法给出较好的结果, 因为在这些情形下不可积性较强。

4.2 可积非共振情形[54]

若哈密顿函数为 H 的哈密顿系统可积非共振, 其等效非线性系统 (12)将具有形为 (17) 的精确平稳解, (33)中 m_{ij} 应满足条件(18)。此时, 三个准则依次导致下列确定 $\partial \lambda / \partial H_s$ 的方程:

$$\int_{\Omega_1} \left[(b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H_s}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial H_s} - M_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}) (b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H_s}{\partial p_j}) / \left| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} \right| \right] d\mathbf{q} = 0 \quad (42)$$

$$\int_{\Omega_1} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} (b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H_s}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial H_s} - M_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}) (\frac{\partial H}{\partial p_i} b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H_s}{\partial p_j}) / \left| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} \right| \right] d\mathbf{q} = 0 \quad (43)$$

$$\int_{\Omega_1} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} (b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H_s}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial H_s} - M_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}) / \left| \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} \right| \right] d\mathbf{q} = 0 \quad (44)$$

式中 $|\partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{P}|$ 是从 \mathbf{P} 变换到 \mathbf{H} 的 Jacobi 矩阵的行列式的绝对值。而

$$\Omega_1 = \{ \mathbf{q} \mid \prod_{i=1}^n H_i(\mathbf{q}, \mathbf{0}) \leq H_i \} \quad (45)$$

若可从(42)、(43)或(44)中得 $\partial\lambda/\partial H_s$ ，并满足相容性条件(19)，则给定系统(32)的近似平稳解乃由将 $\partial\lambda/\partial H_s$ 代入(20)再代入(17)得到。若可得到 n 个作用变量，则可导出以 I_s 取代 H_s 的类似方程。

4.3 可积共振情形[55]

若具有哈密顿函数 H 的哈密顿系统可积共振，其等效非线性系统(12)将具有形为(21)的精确平稳解，(33)中 m_{ij} 应满足(22)。此时，三个准则分别导致下列确定 $\partial\lambda/\partial I_s$ 、 $\partial\lambda/\partial\psi_u$ 的表达式：

$$\int_0^{2\pi} \delta_i \frac{\delta\delta_i}{\delta g_\mu} d\theta_1 = 0 \quad (46)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\delta\delta_i}{\delta g_\mu} d\theta_1 = 0 \quad (47)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial I_s}{\partial p_i} \delta_i d\theta_1 = 0 \quad (48a)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial\psi_u}{\partial p_i} \delta_i d\theta_1 = 0 \quad (48b)$$

式中 $i, s = 1, 2, \dots, n$; $\mu = 1, 2, \dots, n + \alpha$; $u = 1, 2, \dots, \alpha$, $\theta_1 = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-\alpha}]^T$; $\int_0^{2\pi} [\bullet] d\theta_1$ 表示 $(n-\alpha)$ 重积分，

$$\delta_i = b_{ij}^{(i)} \left(\frac{\partial I_s}{\partial p_j} \frac{\partial\lambda}{\partial I_s} + \frac{\partial\psi_u}{\partial p_j} \frac{\partial\lambda}{\partial\psi_u} \right) - M_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j} \quad (49)$$

$$g_\mu = \begin{cases} \partial\lambda/\partial I_s & , \mu = s = 1, 2, \dots, n \\ \partial\lambda/\partial\psi_u & , \mu = n + u = n + 1, \dots, n + \alpha \end{cases} \quad (50)$$

若可从 (46)、(47)或(48)中解得 $\partial\lambda/\partial I_s$ 、 $\partial\lambda/\partial\psi_u$ ，并满足类似于(19)的相容性条件，则给定系统(32)的近似平稳解由将 $\partial\lambda/\partial I_s$ 、 $\partial\lambda/\partial\psi_u$ 代入(23)，然后代入(21)得到，曾用这种方法得到非线性阻尼耦合的两个频率相同的线性振子在高斯白噪声外激下的近似平稳解。

4.4 部分可积非共振情形[56]

若具有哈密顿函数 H 的哈密顿系统为部分可积非共振，则等效非线性(12)将具有形如(24)的精确平稳解，(33)中 m_{ij} 将满足(25)。此时，三种等效准则依次导致下列确定 $\partial\lambda/\partial H_s$ 的方程：

$$\int_{\Omega_2} \left[(b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H_s}{\partial p_j} \frac{\partial\lambda}{\partial H_s} - M_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}) (b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H_s}{\partial p_j}) / \left(\prod_{v=1}^r \frac{\partial H_v}{\partial p_v} \right) \right] d\mathbf{q} dp_{r+1} \dots dp_n = 0 \quad (51)$$

$$\int_{\Omega_2} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} (b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H_s}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial H_s} - M_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}) (\frac{\partial H}{\partial p_i} b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H_s}{\partial p_j}) / (\prod_{v=1}^r \frac{\partial H_v}{\partial p_v}) \right] d\mathbf{q} dp_{r+1} \cdots dp_n = 0 \quad (52)$$

$$\int_{\Omega_2} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} (b_{ij}^{(i)} \frac{\partial H_s}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial H_s} - M_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}) / (\prod_{v=1}^r \frac{\partial H_v}{\partial p_v}) \right] d\mathbf{q} dp_{r+1} \cdots dp_n = 0 \quad (53)$$

式中 $i, j=1, 2, \dots, n; s=1, 2, \dots, r$,

$$\Omega_2 = \{(\mathbf{q}, p_{r+1}, \dots, p_n) \mid \bigcap_{\mu=1}^{r-1} (H_\mu(q_\mu, 0) \leq H_\mu) \cap H_r(q_r, \dots, q_n, 0, p_{r+1}, \dots, p_n) \leq H_r\} \quad (54)$$

\cap 表示所有不等式同时满足。若可从(51)、(52)或(53)中解得 $\partial \lambda / \partial H_s$, 并满足类似于(19)的相容性条件, 则给定系统(32)的近似平稳解由将 $\partial \lambda / \partial H_s$ 代入(26), 然后代入(24)得到。若可得到作用量的显式, 则可得以 I_s 代 H_s 的类似方程。曾用该法得到由两个阻尼耦合的线性振子与一个不可分离两自由度非线性振子组成的系统在高斯白噪声外激下的近似平稳解, 其结果与数字模拟结果甚为吻合。

4.5 部分可积共振情形[56]

若具有哈密顿函数 H 的哈密顿系统为部分可积共振, 有 β 个形为(6)的共振关系, 则等效非线性系统(12)的精确平稳解将形为(27), 而(33)中 m_{ij} 将满足(28)。此时, 三个等效准则将依次导致下列确定 $\partial \lambda / \partial I_\eta$ 、 $\partial \lambda / \partial H_r$ 、 $\partial \lambda / \partial \psi_v$ 的方程:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\Omega_3} (\delta_i \frac{\delta \delta_i}{\delta g_\mu} / \frac{\partial H_r}{\partial p_r}) dq_r \cdots dq_n dp_{r+1} \cdots dp_n d\theta_2 = 0 \quad (55)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\Omega_3} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta_i \frac{\delta}{\delta g_\mu} (\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta_i) / \frac{\partial H_r}{\partial p_r} \right] dq_r \cdots dq_n dp_{r+1} \cdots dp_n d\theta_2 = 0 \quad (56)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\Omega_3} (\frac{\partial I_\eta}{\partial p_i} \delta_i / \frac{\partial H_r}{\partial p_r}) dq_r \cdots dq_n dp_{r+1} \cdots dp_n d\theta_2 = 0 \quad (57a)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\Omega_3} (\frac{\partial H_r}{\partial p_i} \delta_i / \frac{\partial H_r}{\partial p_r}) dq_r \cdots dq_n dp_{r+1} \cdots dp_n d\theta_2 = 0 \quad (57b)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\Omega_3} (\frac{\partial \psi_v}{\partial p_i} \delta_i / \frac{\partial H_r}{\partial p_r}) dq_r \cdots dq_n dp_{r+1} \cdots dp_n d\theta_2 = 0 \quad (57c)$$

$$i=1, 2, \dots, n; \mu=1, 2, \dots, r+\beta; \eta=1, 2, \dots, r-1; v=1, 2, \dots, \beta$$

式中 $\theta_2 = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{r-1-\beta}]^T$

$$\delta = b_{ij}^{(i)} \left(\frac{\partial I_\eta}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial I_\eta} + \frac{\partial H_r}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial H_r} + \frac{\partial \psi_v}{\partial p_j} \frac{\partial \lambda}{\partial \psi_v} \right) - M_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial b_{ij}^{(i)}}{\partial p_j}$$

$$g_\mu = \begin{cases} I_\eta, & \mu = \eta = 1, 2, \dots, r-1 \\ H_r, & \mu = r \\ \psi_\nu, & \mu = r + \nu = r+1, \dots, r+\beta \end{cases} \quad (58)$$

$$\Omega_3 = \{(q_r, \dots, q_n, p_{r+1}, \dots, p_n) | H_r(q_r, \dots, q_n, 0, p_{r+1}, \dots, p_n) \leq H_r\}$$

若可从(55)、(56)或(57)中解得 $\partial\lambda/\partial I_\eta$ 、 $\partial\lambda/\partial H_r$ 及 $\partial\lambda/\partial\psi_\nu$ ，且满足形如(19)的相容性条件，则给定系统(32)的近似平稳解将由 $\partial\lambda/\partial I_\eta$ 、 $\partial\lambda/\partial H_r$ 、 $\partial\lambda/\partial\psi_\nu$ 代入(29)，然后代入(27)得到。曾用该法得到 4.4 中提到的系统在线性子系统的两个频率相同情形的近似平稳解，并为 Monte Carlo 模拟结果证实。

顺便指出，(42)-(44)、(46)-(48)、(51)-(53)、(55)-(57)，在完成积分后，是未知量 $\partial\lambda/\partial H_s$ 等的线性代数方程，很容易求解。与等效线性化相反，此处不必迭代求解，许多情形下还可求得平稳概率密度的解析表达式。而且，由于给定系统与等效系统具有相同哈密顿函数与随机激励，在等效过程中部分非线性特性保持不变，因而此处给出的等效非线性系统法能预测非高斯响应。

高斯白噪声激励下耗散的哈密顿系统等效非线性系统法已推广到高斯白噪声激励下耗散的广义哈密顿系统，得到了不可积，可积非共振，可积共振，部分可积非共振，部分可积共振五种情形的近似平稳解[46]。

5 随机平均法

在许多物理与工程非线性随机系统中，常可按时间尺度将响应分成两类：快变过程与慢变过程。例如，在一个拟保守随机系统(即一个线性或非线性保守系统受小线性与(或)非线性阻尼及弱随机外激与(或)参激)中，位移与速度是快变过程，而振动幅值与能量包线是慢变过程。应用中，人们常常主要对慢变过程感兴趣，因为他们表征系统的长时间性态。平均法的目的是将快变量平均掉，导出关于慢变量的近似方程，它比原方程简单、维数低。一般地，随机平均同时包含随机平均与确定性平均，两者可先可后。随机平均计及随机激励乘以相关响应的平均效应，物理上宽带随机激励代之以数学上高斯白噪声激励。于是，慢变响应量近似代之以矢量扩散过程，对此可用 FPK 方程法。另一方面，确定性平均则应用于其他项以消除原方程中叠加于缓慢漂移上的小的快速波动以进一步简化方程，甚至降低慢变方程的维数。这样，随机平均法成为求解非线性随机动力学问题，包括响应预测、稳定性及首次穿越分析

等的有力工具。直至 1990 年代，在非线性随机动力学中广泛应用的随机平均法主要有两种。一种是标准随机平均法，或 Stratonovich 随机平均法，它由 Stratonovich [57]于 1960 年代初基于物理考虑提出，而后由 Khasminskii [58], Papanicolaou 与 Kohler [59]及 Blankenship 与 Papanicolaou [60]数学上加以证明，适用于受宽带随机激励或谐和与宽带共同激励的多自由度拟线性系统。二是能量包线随机平均法或拟保守平均法，它由 Landa 与 Stratonovich [61]与 Khasminskii [62] 分别提出，适用于单自由度拟保守系统受高斯白噪声激励。后一随机平均法已被推广于宽带随机激励[63-66]、谐和与白噪声共同激励[67]、有界噪声激励[68]。最近，对具有中心平衡点的单自由度哈密顿系统受小阻尼与高斯白噪声激励的随机激励的随机平均法进行了严密考察[69]，并发展了具有鞍点的单自由度哈密顿系统在小阻尼与高斯白噪声激励下的随机平均理论[70,71]。在后一情形，约化的空间为图，极限扩散过程在图的顶点有粘连条件。对随机平均法的发展与应用的更多贡献可在专著[2,3,5,8]、会议录[16-20]及评述论文[23,72-74]中找到。发展拟哈密顿系统与拟广义哈密顿系统的随机平均法的目的是将随机平均法推广于多自由度强非线性拟保守随机系统。

考虑无控制，即 $u_i = 0$ 时系统(1)。当阻尼小、随机激励弱时，或由随机激励输入系统的能量与阻尼耗散系统能量之差比系统本身的总能量为小时，(1)称为拟哈密顿系统。相应哈密顿系统中的首次积分在拟哈密顿系统中变成慢变过程，而其它响应量为快变过程。这些慢变过程对描述系统的长时间性态极为重要。拟哈密顿系统随机平均法就是将快变过程平均掉，导出关于慢变过程的平均 $It\hat{o}$ 方程。已证明，平均 $It\hat{o}$ 方程的形式与维数取决于相应哈密顿系统的可积性与共振性。

5.1 不可积情形[75]

假设方程(12)中

$$m_{ij} = \varepsilon m'_{ij}, \sigma_{ik} = \varepsilon^{1/2} \sigma'_{ik} \quad (59)$$

式中 m'_{ij} 、 σ'_{ik} 为有限量，而哈密顿函数为 H 的相应哈密顿系统不可积。此时，哈密顿是(12)

中唯一的慢变过程，关于哈密顿的 $It\hat{o}$ 方程可由(12)用 $It\hat{o}$ 微分规则得到

$$dH = \varepsilon \left(-m'_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j} \frac{\partial H}{\partial P_i} + \frac{1}{2} \sigma'_{ik} \sigma'_{jk} \frac{\partial^2 H}{\partial P_i \partial P_j} \right) dt + \varepsilon^{1/2} \frac{\partial H}{\partial P_i} \sigma'_{ik} dB_k(t) \quad (60)$$

按照 Khasminskii 定理[76],在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，(60)中 $H(t)$ 在 ε^{-1} 阶时间区间上弱收敛于一维扩散过程。该扩散过程的平均 $It\hat{o}$ 方程形为

$$dH = \bar{m}(H)dt + \bar{\sigma}(H)dB(t) \quad (61)$$

式中 \bar{m} 、 $\bar{\sigma}$ 乃在 H 保持常数条件下由对(60)中的漂移与扩散系数作时间平均得到。鉴于相应哈密顿系统在常数能量面上遍历，时间平均可代之以空间平均。于是，平均漂移与扩散系数为

$$\bar{m}(H) = \frac{1}{T(H)} \int_{\Omega} [(-m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{1}{2} \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}) / \frac{\partial H}{\partial p_1}] dq_1 \cdots dq_n dp_2 \cdots dp_n \quad (62a)$$

$$\bar{\sigma}^2(H) = \frac{1}{T(H)} \int_{\Omega} [(\sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial p_j}) / \frac{\partial H}{\partial p_1}] dq_1 \cdots dq_n dp_2 \cdots dp_n \quad (62b)$$

其中 Ω 由(41)定义，

$$T(H) = \int_{\Omega} (1 / \frac{\partial H}{\partial p_1}) dq_1 \cdots dq_n dp_2 \cdots dp_n \quad (63)$$

平均系统的精确平稳解由求解与平均 $It\hat{o}$ 方程(61)相应的简化 FPK 方程得到，它是

$$p(H) = C \exp\{-\int_0^H [\frac{d\bar{\sigma}^2(u)}{du} - 2\bar{m}(u)] / \bar{\sigma}^2(u) du\} \quad (64)$$

而原系统(12)近似的平稳解为

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = [p(H) / T(H)]|_{H=H(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \quad (65)$$

该法已被应用于得到两个非线性耦合的 van der Pol 振子与两自由度振动碰撞系统在高斯白噪声外激与(或)参激下的近似的平稳概率密度与统计量，并为 Monte Carlo 数字模拟结果证实[41]。

5.2 可积非共振情形[77]

若相应哈密顿系统可积非共振，(12)中 n 个作用量或 n 个独立、对合的首次积分将是慢变过程。注意，可积非共振哈密顿系统在 n 维环面上遍历，时间平均可代之以关于 n 个角变量的空间平均。类似的推导给出下列平均 $It\hat{o}$ 方程：

$$dI_r = \bar{m}_r(\mathbf{I})dt + \bar{\sigma}_{rk}(\mathbf{I})dB_k(t) \quad (66)$$

$$r = 1, 2, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, m$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{m}_r(\mathbf{I}\theta) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} (-m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial I_r}{\partial p_i} + \frac{1}{2} \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial^2 I_r}{\partial p_i \partial p_j}) d \\ \bar{\sigma}_{ik} \bar{\sigma}_{jk}(\mathbf{I}\theta) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial I_r}{\partial p_i} \frac{\partial I_s}{\partial p_j} d \end{aligned} \quad (67)$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, n$$

平均系统的精确平稳解 $p(\mathbf{I})$ 可按 3.2 中描述的步骤从求解与平均 $It\hat{o}$ 方程(66)相应的简化 FPK 方程得到。原系统(12)的近似平稳解形则为

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^n} p(\mathbf{I}) \quad (68)$$

该法已被应用于受高斯白噪声参激的非线性耦合的 van der Pol 与 Duffing 振子, 所得近似平稳概率密度与均方值亦已用数学模拟结果证实。注意, 还可导出关于 n 个独立、对合首次积分的平均 $It\hat{o}$ 方程, 并通过求该平均系统的精确平稳解得到原系统的近似平稳解。

5.3 可积共振情形[77]

若相应的哈密顿系统可积弱共振, 有 α 个形为 $k_i^u \omega_i = O(\varepsilon)$ 的弱共振关系, 则(12)中 n 个作用量与 α 个角变量组合 $\psi_u = k_i^u \theta_i$ 为慢变过程, 类似的推导给出如下平均 $It\hat{o}$ 方程:

$$\begin{aligned} dI_r &= \bar{m}_r(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}) dt + \bar{\sigma}_{rk}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}) dB_k(t) \\ d\psi_u &= \bar{m}_{n+u}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}) dt + \bar{\sigma}_{n+u,k}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}) dB_k(t) \end{aligned} \quad (69)$$

$r = 1, 2, \dots, n; \quad u = 1, 2, \dots, \alpha; \quad k = 1, 2, \dots, m$

其中平均漂移系数与扩散系数为

$$\begin{aligned} \bar{m}_r(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n-\alpha}} \int_0^{2\pi} \left(-m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial I_r}{\partial p_i} + \frac{1}{2} \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial^2 I_r}{\partial p_i \partial p_j} \right) d\boldsymbol{\theta}_1 \\ \bar{m}_{n+u}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n-\alpha}} \int_0^{2\pi} \left(O_u(\varepsilon) - m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial \psi_u}{\partial p_i} + \frac{1}{2} \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial p_i \partial p_j} \right) d\boldsymbol{\theta}_1 \\ \bar{\sigma}_{rk} \bar{\sigma}_{sk}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n-\alpha}} \int_0^{2\pi} \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial I_r}{\partial p_i} \frac{\partial I_s}{\partial p_j} d\boldsymbol{\theta}_1 \\ \bar{\sigma}_{rk} \bar{\sigma}_{n+u,k}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n-\alpha}} \int_0^{2\pi} \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial I_r}{\partial p_i} \frac{\partial \psi_u}{\partial p_j} d\boldsymbol{\theta}_1 \\ \bar{\sigma}_{n+u,k} \bar{\sigma}_{n+v,k}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n-\alpha}} \int_0^{2\pi} \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial \psi_u}{\partial p_i} \frac{\partial \psi_v}{\partial p_j} d\boldsymbol{\theta}_1 \end{aligned} \quad (70)$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$

可知, 平均方程的维数等于相应哈密顿系统独立、对合首次积分数 n 加上共振系数 α 。平均系统的精确平稳解 $\rho(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi})$ 可按 3.3 中描述的步骤从求解与平均 $It\hat{o}$ 方程(69)相应的简化 FPK 方程得到。(12)的近似平稳解则为

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{n-\alpha}} p(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}) \quad (71)$$

5.4 部分可积非共振[78]

若相应哈密顿系统部分可积非共振, 有 r 个独立、对合的首次积分, 则(12)中 $r-1$ 个作用量及第 r 个首次积分 H_r 为慢变过程。类似的推导给出下列平均 $It\hat{o}$ 方程:

$$\begin{aligned}
dI_\eta &= \bar{m}_\eta(\mathbf{I}', H_r)dt + \bar{\sigma}_{\eta k}(\mathbf{I}', H_r)dB_k(t) \\
dH_r &= \bar{m}_r(\mathbf{I}', H_r)dt + \bar{\sigma}_{rk}(\mathbf{I}', H_r)dB_k(t) \\
\eta &= 1, 2, \dots, r-1; \quad k = 1, 2, \dots, m
\end{aligned} \tag{72}$$

其中平均漂移与扩散系数为

$$\begin{aligned}
\bar{m}_\eta(\mathbf{I}', H_r) &= \left\langle -m_{\eta'j} \frac{\partial H}{\partial P_j} \frac{\partial I_\eta}{\partial P_{\eta'}} + \frac{1}{2} \sigma_{\eta'k} \sigma_{\eta''k} \frac{\partial^2 I_\eta}{\partial P_{\eta'} \partial P_{\eta''}} \right\rangle \\
\bar{m}_r(\mathbf{I}', H_r) &= \left\langle -m_{\rho j} \frac{\partial H}{\partial P_j} \frac{\partial H_r}{\partial P_\rho} + \frac{1}{2} \sigma_{\rho k} \sigma_{\rho'k} \frac{\partial^2 H_r}{\partial P_\rho \partial P_{\rho'}} \right\rangle \\
\bar{\sigma}_{\eta k} \bar{\sigma}_{\eta'k}(\mathbf{I}', H_r) &= \left\langle \sigma_{\eta'k} \sigma_{\eta''k} \frac{\partial I_\eta}{\partial P_{\eta'}} \frac{\partial I_{\eta'}}{\partial P_{\eta''}} \right\rangle \\
\bar{\sigma}_{\eta k} \bar{\sigma}_{rk}(\mathbf{I}', H_r) &= \left\langle \sigma_{\eta'k} \sigma_{\rho k} \frac{\partial I_\eta}{\partial P_{\eta'}} \frac{\partial H_r}{\partial P_\rho} \right\rangle \\
\bar{\sigma}_{rk} \bar{\sigma}_{\rho'k}(\mathbf{I}', H_r) &= \left\langle \sigma_{\rho k} \sigma_{\rho'k} \frac{\partial H_r}{\partial P_\rho} \frac{\partial H_r}{\partial P_{\rho'}} \right\rangle \\
\bar{\eta}, \bar{\eta}', \bar{\eta}'' &= 1, 2, \dots, r-1; \quad \rho, \rho' = r, r+1, \dots, n
\end{aligned} \tag{73}$$

式中

$$\begin{aligned}
\langle \cdot \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{r-1} T(H_r)} \int_{\Omega_3} \int_0^{2\pi} \left[\cdot / \frac{\partial H_r}{\partial p_r} \right] d\theta' dq_r \cdots dq_n dp_{r+1} \cdots dp_n \\
T(H_r) &= \int_{\Omega_3} \left(1 / \frac{\partial H_r}{\partial p_r} \right) dq_r \cdots dq_n dp_{r+1} \cdots dp_n
\end{aligned} \tag{74}$$

Ω_3 由方程(58)定义, $\int_0^{2\pi} [\cdot] d\theta'$ 表示关于 $\theta' = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{r-1}]^T$ 的 $r-1$ 重积分。平均系统的精确平稳解 $p(\mathbf{I}', H_r)$ 可按 3.4 节中描述的步骤从求解与平均 $It\hat{o}$ 方程(72)相应的简化 FPK 方程得到, 原系统(12)的近似平稳解则为

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{p(\mathbf{I}', H_r)}{(2\pi)^{r-1} T(H_r)} \Big|_{\mathbf{I}' = \mathbf{I}'(\mathbf{q}, \mathbf{p}), H_r = H_r(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \tag{75}$$

5.5 部分可积共振情形[78]

若相应的哈密顿系统部分可积弱共振, 有 r 个独立、对合的首次积分与 β 个弱共振关系 $k_\eta^u \omega_\eta = 0(\varepsilon), \eta = 1, 2, \dots, r-1, u = 1, 2, \dots, \beta$, 则(12)中 $r-1$ 个作用量, 第 r 个首次积分及 β 个角变量组合 $\Psi_v = k_\eta^u \omega_\eta$ 为慢变过程。类似的推导给出下列平均 $It\hat{o}$ 方程:

$$\begin{aligned}
dI_\eta &= \bar{m}_\eta(\mathbf{I}', H_r, \Psi')dt + \bar{\sigma}_{\eta k}(\mathbf{I}', H_r, \Psi')dB_k(t) \\
dH_r &= \bar{m}_r(\mathbf{I}', H_r, \Psi')dt + \bar{\sigma}_{rk}(\mathbf{I}', H_r, \Psi')dB_k(t) \\
d\Psi_u &= \bar{m}_{r+u}(\mathbf{I}', H_r, \Psi')dt + \bar{\sigma}_{r+u,k}(\mathbf{I}', H_r, \Psi')dB_k(t) \\
\eta &= 1, 2, \dots, r-1; \quad u = 1, 2, \dots, \beta; \quad k = 1, 2, \dots, m
\end{aligned} \tag{76}$$

其中平均漂移与扩散系数为

$$\begin{aligned}
\bar{m}_\eta(\mathbf{I}\Psi H_r, \cdot) &= \left\langle -m_{\eta'j} \frac{\partial H}{\partial P_j} \frac{\partial I_\eta}{\partial P_{\eta'}} + \frac{1}{2} \sigma_{\eta'k} \sigma_{\eta''k} \frac{\partial^2 I_\eta}{\partial P_{\eta'} \partial P_{\eta''}} \right\rangle \\
\bar{m}_r(\mathbf{I}\Psi H_r, \cdot) &= \left\langle -m_{\rho j} \frac{\partial H}{\partial P_j} \frac{\partial H_r}{\partial P_\rho} + \frac{1}{2} \sigma_{\rho k} \sigma_{\rho'k} \frac{\partial^2 H_r}{\partial P_\rho \partial P_{\rho'}} \right\rangle \\
\bar{m}_{r+u}(\mathbf{I}\Psi H_r, \cdot) &= \left\langle O_u(\varepsilon) - m_{\eta'j} \frac{\partial H}{\partial P_j} \frac{\partial \psi \psi}{\partial P_{\eta'}} + \frac{1}{2} \sigma_{\eta'k} \sigma_{\eta''k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial P_{\eta'} \partial P_{\eta''}} \right\rangle \\
\bar{\sigma}_{\eta k} \bar{\sigma}_{\eta'k}(\mathbf{I}\Psi H_r, \cdot) &= \left\langle \sigma_{\eta'k} \sigma_{\eta''k} \frac{\partial I_\eta}{\partial P_{\eta'}} \frac{\partial I_{\eta'}}{\partial P_{\eta''}} \right\rangle \\
\bar{\sigma}_{\eta k} \bar{\sigma}_{rk}(\mathbf{I}\Psi H_r, \cdot) &= \left\langle \sigma_{\eta'k} \sigma_{\rho k} \frac{\partial I_\eta}{\partial P_{\eta'}} \frac{\partial H_r}{\partial P_\rho} \right\rangle \\
\bar{\sigma}_{r+u,k} \bar{\sigma}_{r+v,k}(\mathbf{I}\Psi H_r, \cdot) &= \left\langle \sigma_{\eta'k} \sigma_{\eta''k} \frac{\partial \psi \psi}{\partial P_{\eta'}} \frac{\partial \psi}{\partial P_{\eta''}} \right\rangle \\
\bar{\sigma}_{\eta k} \bar{\sigma}_{r+u,k}(\mathbf{I}\Psi H_r, \cdot) &= \left\langle \sigma_{\eta'k} \sigma_{\eta''k} \frac{\partial I_\eta}{\partial P_{\eta'}} \frac{\partial \psi_u}{\partial P_{\eta''}} \right\rangle \\
\bar{\sigma}_{rk} \bar{\sigma}_{r+u,k}(\mathbf{I}\Psi H_r, \cdot) &= \left\langle \sigma_{\rho k} \sigma_{\eta k} \frac{\partial H_r}{\partial P_\rho} \frac{\partial \psi_u}{\partial P_{\eta'}} \right\rangle \tag{77} \\
\bar{\eta}, \eta', \eta'' &= 1, 2, \dots, r-1; \quad \rho, \rho' = r, r+1, \dots, n
\end{aligned}$$

式中

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{r-\beta-1} T(H_r)} \int_{\Omega_3} \int_0^{2\pi} \left[\cdot / \frac{\partial H_r}{\partial p_r} \right] d\theta'' dq_r \cdots dq_n dp_{r+1} \cdots dp_n \tag{78}$$

$\int_0^{2\pi} [\cdot] d\theta''$ 表示关于 $\theta'' = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{r-\beta-1}]^T$ 的 $(r-\beta-1)$ 重积分。平均 $It\hat{o}$ 方程的维数等于相应哈密顿系统独立、对合首次积分数 r 加上弱共振关系系数 β 。平均系统的精确平稳解 $p(\mathbf{I}\Psi H_r, \cdot)$ 可按 3.5 节中描述的步骤从求解与平均 $It\hat{o}$ 方程(76)相应的简化 FPK 方程得到。原系统(12) 的近似平稳解则为

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{p(\mathbf{I}\Psi H_r, \cdot)}{(2\pi)^{r-\beta-1} T(H_r)} \quad (79)$$

5.4 与 5.5 种描述的方法已被应用于 4.4 节中提到的例子，包括非共振与共振情形，其结果已被 Monte Carlo 数字模拟结果证实。

5.6 推广与应用

5.1-5.5 中描述的乃是高斯白噪声激励的拟哈密顿系统的随机平均法。对拟可积哈密顿系统，5.2 与 5.3 中描述的随机平均法已被推广于非白噪声激励，包括宽带随机激励[79,80]，谐和与高斯白噪声共同激励[81,82]，有界噪声(具有常数幅值与随机频率和相位的谐和函数)激励 [83]，及纯谐和激励[84]。在纯谐和、组合谐和与白噪声及有界噪声激励情形，除了考虑 5.3、5.5 中提及的内共振外，还要计及可能的共振。鉴于随机平均及其系数的表达式较繁，此处不予列出。对拟线性系统，拟哈密顿系统随机平均法可化为古典随机平均法。对单自由度强非线性系统，拟哈密顿系统随机平均法可化为拟保守随机平均法或能量包线随机平均法。

上述高斯白噪声与非白噪声激励下的拟可积哈密顿系统随机平均法已进一步推广至包含时滞反馈控制的拟可积哈密顿系统[85,86]。

高斯白噪声激励下拟哈密顿系统随机平均法已推广到拟广义哈密顿系统，建立了高斯白噪声激励下不可积，可积非共振，可积共振，部分可积非共振，部分可积共振五种拟广义哈密顿系统的随机平均方程，给出了相应漂移与扩散系数的公式[87]。

滞迟系统是工程结构中常见的一类非线性系统。滞迟力是耦合的非线性恢复力与阻尼力，有多种滞迟力模型。这类系统常受随机载荷作用，因此，很多人研究过随机滞迟系统。最常用的是统计线性化法。本文作者及其合作者分别就双线性(分布弹塑性)、Bouc-Wen, Duhem, Preisach 滞迟系统建立了能量包线随机平均法，给出比统计线性化法与一般随机平均法更好的结果[88-91]。

拟哈密顿随机平均法的一个成功应用之例是用来研究生物群体运动。每个生物体用一个主动布朗质点表示，它具有从外界吸取能量，然后转化为运动的功能，各主动布朗质点之间由一定势相关联。德国洪堡大学物理研究所 Ebeling 等曾用数字模拟研究过。Deng 与 Zhu 用拟哈密顿系统随机平均法给出了近似解析结果，与数字模拟结果很吻合[92,93]。

前述皆为高斯白噪声激励下非线性系统响应预测，而对非高斯白噪声激励，例如泊松白噪声、列维白噪声等，由于其对应的广义 FPK 方程有无穷项，迄今尚无通用的精确解法，而主要依靠近似方法或数值方法，例如摄动法[94,95]、广义胞映射法[96]等，但受算法精度

和运算复杂度的制约，基本止步于二自由度系统。因此，将随机平均法拓展到非高斯随机激励下的响应预测，是一个重要的研究方向。

应强调的是，拟哈密顿系统随机平均法有许多优点。平均系统的维数等于相应哈密顿系统独立、对合的首次积分数加上内、外共振关系数，一般它总小于原系统的维数。平均系统只含慢变过程，不像原系统同时包含慢变过程与快变过程。慢变过程是一个矢量扩散过程，所有适用于扩散过程的方法皆可用之。平均 FPK 方程只含概率势流而无概率环流。对高斯白噪声激励的机械/结构系统，扩散矩阵通常是奇异的，而平均系统的扩散矩阵一般是非奇异的，这种平均系统的动态规划方程具有古典解而非粘性解。所以，拟哈密顿系统随机平均法是一个研究多自由度强非线性随机系统的响应、稳定性、分岔、首次穿越及控制的强有力的工具。

6. 随机稳定性与分岔

随机稳定性理论处理随机参数扰动下动态系统的平凡解的稳定性。随机性乃用响应的一个适当的模的有界性与收敛性定义。鉴于随机变量序列的收敛性可用几种方式解释，因此有许多随机稳定性定义[97]。其中，概率为 1 Lyapunov 稳定性(几乎肯定稳定性或样本稳定性)，概率稳定性及 p 阶矩稳定性最为常用。已按不同系统类型(线性或非线性)与随机扰动性质(白噪声与非白噪声)发展了随机稳定性理论。对非白噪声激励下二阶线性系统的渐近样本稳定性，只得到一些充分条件，已总结在专著[8]中。研究随机稳定性初期，多用 Lyapunov 函数或 Lyapunov 第二法[10]。然而对给定系统并无构造 Lyapunov 函数的一般规则，只有一些建议[98]。而且，用该法得到的往往只是稳定性的充分条件。自 1980 年代，更常用最大 Lyapunov 指数研究线性或非线性系统的渐近稳定性。Lyapunov 指数定义为线性系统响应模的渐近指数增长率。按 Oseledec 乘法遍历定理[99]，负的最大 Lyapunov 指数是渐近样本稳定性的充要条件。Khasminskii[100]给出了一个求线性 Itô 方程的最大 Lyapunov 指数的一般步骤，该步骤也适用于具有齐一次漂移与扩散系数的非线性随机系统[101]。该步骤已被成功的应用于某些二维线性随机系统。对于高于二维的随机系统，直接应用 Khasminskii 步骤不太成功，主要是因为难以求得高维空间中单位超球面上扩散过程的不变测度(平稳概率密度)。有三种方法克服这一困难。一是通过随机数值计算或模拟求解近似最大 Lyapunov 指数[102]，二是对小或大的噪声强度借助扰动理论或奇异扰动理论计算近似最大 Lyapunov 指数[103]，三是先作随机平均，再对平均 Itô 方程应用 Khasminskii 步骤[104,105]。通过引入一个独立、对

合首次积分之和平方根作模，应用拟哈密顿随机平均法与 Khasminskii 步骤，本文作者与其合作者导出了拟哈密顿系统最大 Lyapunov 指数表达式，将在 6.1 中给出。

概率为 1 的 Lyapunov 稳定性是确定性系统中 Lyapunov 稳定性对随机系统的一个自然推广。然而，对渐近样本稳定的系统，仍可有小概率的大样本模，这意味着对足够大的 p, p 阶矩将是不稳定的。因此，为对系统动态稳定性有一个完全图像，同时研究样本稳定性与矩稳定性是重要的。为此，引入了矩 Lyapunov 指数，并建立了最大 Lyapunov 指数与矩 Lyapunov 指数之间的关系[106]。矩 Lyapunov 指数也很难求，迄今只有少量的结果[107-109]。

一维齐次扩散过程的稳定性与其边界的性态密切相关。对单自由度非线性随机系统，可用随机平均法得到一维扩散过程，渐近概率稳定性条件可由平均扩散过程的边界分类确定[8]，该法已被推广于拟不可积哈密顿系统(见 6.2)。

随机分岔理论研究随机动态系统族的渐近性态随系统参数的变化而发生定性变化。随机分岔可分为动态分岔(D-分岔)与唯象分岔(P-分岔)，D-分岔与 Lyapunov 指数的正负变化紧密相关，无噪声时，它化为确定性分岔。P-分岔与系统响应的平稳概率密度定性变化相关，如从单峰变成多峰或反之。近二十多年来，随机分岔已被许多数学家、工程师及物理学家研究过，多数研究成果总结在专著[12,110]与评述论文[111,112]中。尽管如此，随机分岔理论仍处于初期，只有少数严格的定理与准则，许多现象只对特定参数用计算机模拟证实。关于拟哈密顿系统的随机分岔的若干新结果综述在 6.2-6.4 中。

6.1 拟哈密顿系统的最大 Lyapunov 指数与概率为 1 渐近 Lyapunov 稳定性

考虑一个受随机参激的拟不可积哈密顿系统，设在中心 $q = p = 0$ 上 $H=0$ ， H 是 q 、 p 的凸函数。代替通常欧几里德模，定义随机稳定性与 Lyapunov 指数定义中的模为

$$\|Z\|=H^{1/2}(Q,P) \quad (80)$$

将平均 Itô 方程(61)在 $H=0$ 处线性化，应用一个类似 Khasminskii [100]中的步骤，可导出如下拟不可积哈密顿系统最大 Lyapunov 指数的近似公式[113]:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \overline{m}'(0) - \frac{1}{4} (\overline{\sigma}'(0))^2 \quad (81)$$

式中“ $\overline{\quad}$ ”表示对 H 的导数。对线性位移项受高斯白噪声参激的 Duffing-van der Pol 振子，由(81)给出的最大 Lyapunov 指数同 Pardoux 与 Wihstutz [114]用渐近展开式给出的一次近似一致。(81)也适用于宽带随机参激下的强非线性振子[66]。

注意，对拟不可积哈密顿系统，相应的哈密顿系统是非线性的。因此，按(80)定义的模不同于欧几里德模。对机械/结构系统，哈密顿函数表示系统总能量，哈密顿函数的平方根

可用来度量相空间中系统状态与平凡解之间的距离。此外，在平凡解邻域，哈密顿函数中通常二次项占优势，因此，定义(80)至少物理上是正当的。不过，需进一步研究以便在数学上证明(80)作为摸定义的正当性与最大 Lyapunov 指数公式(81)的正确性。

非共振情形拟可积哈密顿系统的平均 $I\hat{o}$ 方程形如(66)。设其平均漂移与扩散系数为 I_r 的齐一次式，否则，在 $I=0$ 处线性化该方程。定义随机稳定性与 Lyapunov 指数定义中的模为

$$\|Z\| = \left(\sum_{r=1}^n I_r \right)^{1/2} \quad (82)$$

用一个类似于 Khasminskii [100] 的步骤，可导出如下最大 Lyapunov 指数的表达式：

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q(\alpha(\alpha)) d\tau = \int Q(\alpha') p(\alpha') d\alpha' \quad (83)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha Z &= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}]^T, \alpha_r = I_r / \| \alpha \|^2, r=1, 2, \dots, n-1, \\ \alpha_n &= 1 - \sum_{r=1}^{n-1} \alpha_r \\ Q(\alpha) &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n F_s(\alpha) - \frac{1}{4} \sum_{s,s'=1}^n \sum_{k=1}^n G_{sk}(\alpha) G_{s'k}(\alpha) \end{aligned} \quad (84)$$

F_s 、 G_{sk} 是平均 $I\hat{o}$ 方程(66)的线性化漂移与扩散系数， $p(\alpha')$ 是 $n-1$ 维扩散过程 α' 的平稳概率密度。该法已被用于研究高斯白噪声参激下耦合的线性与非线性振子[115]与作随机垂直支承运动的陀螺摆[116]的几乎肯定稳定性。对[104]中研究过的宽带随机参激下 2 自由度线性非陀螺系统，用本方法得到的最大 Lyapunov 指数与[104]中得到的相同。本方法已推广于含时滞反馈控制的拟可积哈密顿系统[117]与拟线性系统[118]。

共振情形拟可积哈密顿系统的平均 $I\hat{o}$ 方程形为(69)。类似的推导导致如下最大 Lyapunov 指数的近似表达式：

$$\lambda_1 = \int Q(\alpha \psi \alpha \psi \alpha \psi) d\alpha \psi \quad (85)$$

对非共振与共振部分可积哈密顿系统，也已得到类似于(83)与(85)的最大 Lyapunov 指数的近似表达式[78]。唯一的差别是 α' 与 ψ 的维数应分别为 $r-1$ 与 β ，而非 $n-1$ 与 α 。该法也已被应用于得到高斯白噪声参激下的 3 自由度拟部分可积哈密顿系统最大 Lyapunov 指数。

对线性或非线性 $I\hat{o}$ 方程，利用 Lyapunov 指数关于摸定义的不变性，提出了一个不必计算最大 Lyapunov 指数直接画出概率为 1 渐近 Lyapunov 稳定域的方法[119]。该法已被用于画出 4 维与 6 维线性随机系统的稳定域。

本节的方法已推广于求解拟不可积广义哈密顿系统的概率为 1 渐近稳定性[46]。应用高

斯白噪声激励下拟不可积广义哈密顿系统的随机平均法,通过计算平均系统或线性化的平均系统的最大 Lyapunov 指数研究其几乎肯定渐近稳定性。

6.2 拟不可积哈密顿系统的概率渐近稳定性与随机 Hopf 分岔

拟不可积哈密顿系统的平均 $Itô$ 方程(61)所描述的哈密顿是一维扩散过程。对一维扩散过程的边界条件已了解得相当清楚[8],有可能藉平均哈密顿过程边界的分类确定拟不可积哈密顿系统的概率稳定性与随机 Hopf 分岔。纯随机参激下拟不可积哈密顿系统平均 $Itô$ 方程支配的平均哈密顿过程的边界是奇异的,一维扩散过程的奇异边界可按扩散指数、漂移指数及特征标值分类[8]。已证,若一维扩散过程的平凡边界为越出或吸引自然,则该一维扩散过程的平凡解局部渐近概率稳定;若一维扩散过程的平凡边界或吸引自然,而另一边界是进入或排斥自然,则该一维扩散过程的平凡解是全局渐近概率稳定。因此,拟不可积哈密顿系统的平凡解的局部或全局渐近稳定性可通过求平均哈密顿过程在平凡边界处或在两个边界上的扩散指数、漂移系数及特征标值近似确定[120]。

拟不可积哈密顿系统平稳概率密度的定性变化与其平均系统的平稳概率密度的变化相关,后者可用平凡边界上扩散指数 α_l , 漂移指数 β_l 及特征标值 c_l 确定。已证,出现随机 Hopf 分岔的必要条件是 $\alpha_l - \beta_l = 1$ 。当该条件满足时,第一次分岔(D-分岔,即平稳概率密度从 δ 函数变成在平凡解处有一个峰的概率密度)出现在 $c_l - \alpha_l = -1$,第二次分岔(P-分岔,即平稳概率密度的峰从平凡解处离开)出现在 $c_l - \alpha_l = 0$,这两次分岔构成一个随机 Hopf 分岔。这一方法已被用于高斯白噪声参激下 Rayleigh-van der Pol 振子[121],并已推广于拟可积哈密顿系统[46]与时滞反馈控制的拟可积哈密顿系统[122]。

6.3 Duffing 振子的随机跳跃及其分岔

自 Lyon 等人于 1961 发现具有硬弹簧的 Duffing 振子在窄带随机激励下的跳跃现象[123]以来对该现象已有许多研究。基于统计线性化或多尺度法的结果,随机跳跃被解释为两个稳定的均方值之间的过渡。然而,这与 FPK 方程平稳解的唯一性相矛盾。基于用数字模拟得到的位移与速度平稳联合概率密度,本作者及其合作者给这个随机跳跃现象以全新的解释[124]。事实上,随机跳跃与随机概率密度的双峰或多峰有关,每个峰对应于一个较大可能运动。随机跳跃实际上是从一个较大可能运动过渡到另一个较大可能运动或反之。Duffing 振子在谐和激励下的确定性跳跃只出现在幅频响应曲线三值频率范围的两端,并只向一个方

向跳跃：频率增大时从大幅值跳向小幅值，而频率减小时从小幅值跳向大幅值。然而，随机跳跃可出现在幅频响应曲线三值频率范围内任一频率上，且可向两个方向跳跃。基于用随机平均法得到的幅值与相位平稳联合概率密度，已证明在谐和与高斯白噪声联合作用下[67,82]或有界噪声作用下[68,83]Duffing 振子及耦合的 Duffing-van der Pol 振子也能发生跳跃。

随着参数(如频率比、非线性强度、激励强度、组尼系数等)的变化，系统从有随机跳跃过渡到无随机跳跃或反之，这实际上就是一种典型的 P-分岔，称之为随机跳跃的分岔。

6.4 拟哈密顿系统在有界噪声激励下的同宿分岔与混沌

近 20 多年来，有许多人对噪声对混沌及通向混沌的道路的影响感兴趣。受谐和与高斯白噪声共同激励的 Duffing 振子与单摆常在这些研究中当作典型的非线性系统，数值求解 FPK 方程以研究有噪声的混沌的概率密度[125]。用广义 Melnikov 函数(Melnikov 函数加上噪声修正项)[126] 或随机 Melnikov 过程[127]被用来研究弱噪声对同宿阈值的影响。有噪声混沌系统的一个特点是多峰值概率密度。

最近，研究了如 Duffing 振子与单摆这些拟哈密顿系统在有界噪声激励下的同宿分岔与混沌[128,129]。用随机 Melnikov 过程的均方准则与令数值计算的最大 Lyapunov 指数为零的办法确定系统出现混沌的有界噪声幅值的临界值，然后用 Poincare 映射进一步证实这些临界幅值，并表明从周期或随机运动通向混沌或随机混沌的道路。已证，在一个很大的随机频率强度范围内，上述三种方法给出可比较的临界幅值。这些方法已被推广应用于研究耦合的单摆与谐振子在有界噪声激励下的同宿分岔与混沌[130]。

7 首次穿越

随机稳定性是一个随机系统初始受扰后在半无限时间区间上停留在平衡位置或平稳运动邻域或回到平衡位置或平稳运动的概率或统计度量。当系统不稳定时，它将在状态空间中随机地运动。首次穿越时间是系统首次离开状态空间中某一区域(安全域或允许域)的随机时间，它与多稳态物理系统的状态过渡及机械/结构系统在随机激励下可靠性相关联。因此，求首次穿越时间的概率与(或)统计量很重要。另一方面，首次穿越时间是随机动力学中最困难的问题之一，迄今只有当所研究的随机现象可模型化为扩散过程处理情形才可能有数学上精确解。对齐次扩散过程，条件可靠性函数(系统初始在安全区内保持停留在安全域内的概率)受后向 Kolmogorov 方程支配，而首次穿越时间的矩受广义 Pontryagin 方程支配。然而，

这些方程的已知解仅限于少数一维情形[5,8]。一般, 这些方程只能用数值方法求解, 例如用有限元法或有限差分法[22]。由于计算时间与存储量随维数的迅速增长, 数值解一直限于低维问题。研究高维系统的首次穿越问题的一个强有力的办法是将随机平均法与首次穿越的扩散过程方法结合起来。这一办法已被许多研究者应用于单自由度随机系统([5,8,131,132]及其所引文献), 而拟哈密顿系统随机平均法与首次穿越扩散过程方法的结合则可应用于研究多自由度强非线性随机系统的首次穿越问题[133-135]。

考虑拟不可积哈密顿系统, 其平均 $I\hat{o}$ 方程为(61), 其中系数由(62)确定。假设平均哈密顿系统过程 $H(t)$ 在区间 $[H_{\min}, \infty)$ 上变化, 安全域为 $[H_{\min}, H_c)$, H_{\min} 与 H_c 分别为哈密顿函数的最小值与临界值。条件可靠性函数

$$R(t | H_0) = P\{H(s) \in [H_{\min}, H_c), s \in (0, t] | H_0 \in [H_{\min}, H_c)\} \quad (86)$$

由下列后向 Kolmogorov 方程

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \bar{m}(H_0) \frac{\partial R}{\partial H_0} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(H_0) \frac{\partial^2 R}{\partial H_0^2} \quad (87)$$

连同初始条件

$$R(0 | H_0) = 1, \quad H_0 \in [H_{\min}, H_c) \quad (88)$$

及边界条件

$$R(t | H_c) = 0 \quad (89)$$

$$R(t | H_{\min}) = \text{finite} \quad (90)$$

支配, 式中 $H_0 = H(0)$ 。方程(87)-(90)构成拟不可积哈密顿系统首次穿越问题的数学提法。解出这些方程后, 首次穿越时间的条件概率密度由下式得到:

$$p(\tau | H_0) = -\left. \frac{\partial R(t | H_0)}{\partial t} \right|_{t=\tau} \quad (91)$$

而条件矩得自

$$\mu_k(H_0) = \int_0^\infty \tau^k p(\tau | H_0) d\tau \quad (92)$$

由此可见, 为得到首次穿越问题的完全解答, 必须求解一个抛物型偏微分方程的初值问题。一个较容易的问题是求首次穿越时间的条件矩 $\mu_k(H_0)$, 它由下列广义 Pontryagin 方程

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(H_0) \frac{\partial^2 \mu_k}{\partial H_0^2} + \bar{m}(H_0) \frac{\partial \mu_k}{\partial H_0} = -k \mu_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (93)$$

连同边界条件

$$\mu_k(H_c) = 0 \quad (94)$$

$$\mu_k(H_{\min}) = \text{finite} < \infty \quad (95)$$

支配。方程(93)-(95) 是一个椭圆型方程的边值问题。

注意, 边界条件(90)与(95)是定性的。利用方程(87)与(93)及在 $H_0 = H_{\min}$ 上漂移与扩散系数, 它们可分别变成定量边界条件[133], (87)-(90)可用有限差分法数值求解, 而方程(93)-(95)可逐步积分[136]。上述组合方法的一个显著优点是方程(87)与(93)是一维的, 而原系统是 $2n$ 维的, 计算量显著减少。

对拟可积与拟部分可积哈密顿系统, 可类似提出穿越问题。主要不同之处在于(87)右边与(93)左边的微分算子需代之以平均 $It\hat{o}$ 方程中的微分算子[134,135]。显然, 在这些情形下, 方程(87)与(93)的维数要高一些, 解起来更困难。然而, 其维数仍比原方程维数低。将随机平均法用于首次穿越问题的其它好处是, 方程(87)与(93)中的扩散矩阵是非奇异的, 而原方程的扩散矩阵是奇异的, 这减小了方程(87)与(93)的数值解的困难。此外, 拟哈密顿系统随机平均法与首次穿越扩散过程法的组合还可应用于有非白噪声激励的系统[137, 138], 具有分数维导数阻尼系统[139]及时滞反馈控制的拟可积哈密顿系统[140,141]。

在拟哈密顿系统随机平均方程基础上计算平均首次穿越时间的方法已成功地应用于计算反应速率[142,143], 所得近似解析表达式比 **Kramers** 的结果[144]更精确, 适用于更一般情形。研究 **Fermi** 共振及其对反应速率的影响[145], 研究分子构形的变化速率[146]及 **DNA** 的热变性速率[147], 所有解析结果与数字模拟结果都相当吻合。

8 非线性随机最优控制

过去 20 多年来, 对结构振动控制已作了大量研究, **Housner** 等给出了一个广泛的评述[148]。由于土木工程结构承受的载荷如风、波浪及地震地面运动等都是随机的, 当结构承受大载荷时又往往呈现出非线性, 结构的非线性随机控制更为合理更为所求。然而, 大多数已提出的控制策略是确定性与(或)线性的[13,148-150], 只在近几年中, 非线性随机最优控制才吸引较多研究者[151-153]。本作者及其合作者在拟哈密顿系统随机平均法与随机动态规划[14,15]的基础上提出并发展了一类非线性随机最优控制策略, 这些控制策略已应用于拟哈密顿系统使之响应最小、稳定化、可靠性最大化或平均首次穿越时间最长化。[60,154,155]给出了应用随机平均法与随机最优控制的数学依据。严格地说, 本节所讨论的随机最优控制乃对平均系统而言, 对原系统, 它只是拟最优控制, 但为简单起见, 此处不加区别。

8.1 响应最小化

考虑弱受控拟哈密顿系统，即具有小阻尼、弱随机激励与控制的系统(1)，研究的目的是设计最优控制律 $u_i = u_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 使响应最小。为简化叙述，设 $\xi_k(t)$ 为高斯白噪声，对非白噪声激励，步骤相似，只是无需加 Wong-Zakai 修正项。所提出控制策略的一个特点是将控制力分成保守部分 $u_i^{(1)}$ 与耗散部分 $u_i^{(2)}$ 。 $u_i^{(1)}$ 用以改变相应哈密顿系统的可积性与共振性，从而改变能量与响应在系统内的分布。迄今，尚无求最优 $u_i^{(1)}$ 的一般步骤。将 $u_i^{(1)}$ 与 Wong-Zakai 修正项中的保守部分同原系统保守力合并，受控系统运动方程变成

$$\begin{aligned} dQ_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i} dt \\ dP_i &= -\left(\frac{\partial H}{\partial Q_i} + m_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j} - u_i^{(2)}\right) dt + \sigma_{ik} dB_k(t) \\ i, j &= 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (96)$$

对除含 $u_i^{(2)}$ 项外的系统(96)应用拟哈密顿系统随机平均法，得到一个部分平均 $It\hat{o}$ 方程。如第 5 节所指出的，平均方程的维数与形式取决于与系统(96)相应的哈密顿系统的可积性与共振性。例如，不可积情形，部分平均方程形为[156-157]

$$dH = [\bar{m}(H) + \langle u_i^{(2)} \frac{\partial H}{\partial P_i} \rangle] dt + \bar{\sigma}(H) dB(t) \quad (97)$$

式中 \bar{m} 、 $\bar{\sigma}$ 由(62)规定， $\langle \bullet \rangle$ 表示平均算子。

控制目标用一个性能指标的最小化表示，它取决于控制的时间区间与控制约束。在有限控制时间区间无控制约束情形，部分平均后的性能指标形为[156,157]

$$J(\mathbf{u}^{(2)}) = E\left[\int_0^{t_f} f(H(s), \langle \mathbf{u}^{(2)}(s) \rangle) ds + g(H(t_f))\right] \quad (98)$$

式中 $\mathbf{u}^{(2)} = [u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \dots, u_n^{(2)}]^T$ 。此时动态规划方程形为

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\min_{\mathbf{u}^{(2)}} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(H) \frac{\partial^2 V}{\partial H^2} + [\bar{m}(H) + \langle u_i^{(2)} \frac{\partial H}{\partial P_i} \rangle] \frac{\partial V}{\partial H} + f(H, \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle) \right\} \quad (99)$$

其终时条件为

$$V(H, t_f) = g(H(t_f)) \quad (100)$$

式中

$$V(H, t) = \min_{\mathbf{u}^{(2)}} E\left[\int_t^{t_f} f(H(s), \langle \mathbf{u}^{(2)}(s) \rangle) ds + g(H(t_f))\right] \quad (101)$$

称为值函数。最优控制律 $\mathbf{u}^{(2)*}$ 由方程(99)右边对 $\mathbf{u}^{(2)}$ 求最小确定。将 $\mathbf{u}^{(2)*}$ 代入(99)得最终动态规划方程。解此方程，并将所得之 $V(H, t)$ 代入 $\mathbf{u}^{(2)*}$ 给出最优控制力 $\mathbf{u}^{(2)*}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 。若 f 对 $\mathbf{u}^{(2)}$ 是

齐二次式的，则控制力是拟线性阻尼力，其系数依赖响应。以 $\mathbf{u}^{(2)*}$ 取代 $\mathbf{u}^{(2)}$ 代入(97)，平均含 $\mathbf{u}^{(2)*}$ 之项，并解与完全平均 $I\hat{o}$ 方程相应的 FPK 方程，就得到最优控制系统的响应的概率密度。

对半无限时间区间上无控制约束的控制，部分平均的性能指标通常是单位时间上的平均成本[156,157]

$$J_1(\mathbf{u}^{(2)}) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f_1(H(s), \langle \mathbf{u}^{(2)}(s) \rangle) ds \quad (102)$$

相应的控制称为遍历控制。此时动态规划方程形为

$$\min_{\mathbf{u}^{(2)}} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(H) \frac{\partial^2 V_1}{\partial H^2} + [\bar{m}(H) + \langle u_i^{(2)} \rangle \frac{\partial H}{\partial p_i}] \frac{\partial V_1}{\partial H} + f_1(H, \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle) \right\} = \gamma \quad (103)$$

式中

$$\gamma = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f_1(H(s), \langle \mathbf{u}^{(2)*}(s) \rangle) ds \quad (104)$$

是最优平均成本。最优控制律 $\mathbf{u}^{(2)*}$ 由方程(103)左边对 $\mathbf{u}^{(2)}$ 求极小得到。若(103)中之 f_1 与(98)中 f 相同，则两者最优控制律相同，而最优控制力与最优控制系统响应可类似地解得。

若与系统(96)相应的哈密顿系统可积或部分可积，确定最优控制力与最优控制系统响应的步骤类似[156,157]。唯一的区别是平均 $I\hat{o}$ 方程与动态规划方程的维数，当然，这些情形动态规划方程与 FPK 方程由于维数高而难解一些。

为评价控制策略，引入两个准则。一是控制效果

$$K_h = \frac{\sigma_h^u - \sigma_h^c}{\sigma_h^u} \quad (105)$$

式中 σ 表示标准差，下标 $h=h(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 表示某动力学量，上标 u、c 分别表示未控与已控。另一准则是控制效率

$$\mu_h = \frac{K_h}{\sigma_{u^*}} \quad (106)$$

式中 σ_{u^*} 表示无量纲化的总控制力的标准差。显然， K_h 、 μ_h 越大，控制策略越好。无界控制策略已被应用于高斯白噪声外激励下的 Duffing 振子、滞迟系统[158,159]，两个非线性阻尼耦合的线性振子。数值结果表明，所提出的控制策略优于普遍采用的线性二次高斯(LQG)控制，这是所提出控制策略的一个显著优点。

8.2 反馈稳定化

一个动态系统可由于参数随机激励而失去稳定性。使该系统稳定化的一个有效办法是反

馈控制。虽然随机稳定化的基本提法与基本方程早已于 1960 年代就有了，很长时间内所有的重要结果属线性二次控制。只在最近十来年中，非线性随机稳定化才引起较多注意，并已用控制 Lyapunov 函数得到了一些结果[160]。最近，为拟哈密顿系统提出了应用遍历控制与最大 Lyapunov 指数的崭新的随机稳定化策略[161-163]，并已应用于风激励下桥梁拉索的反馈稳定化。

考虑纯随机参激下拟哈密顿系统，假定未控系统的平凡解是不稳定的(其最大 Lyapunov 指数为正)，目标是设计反馈控制使系统稳定化，即使其最大 Lyapunov 指数为负。由于通常最大 Lyapunov 指数不能用系统响应与控制力的显式表示，难以用最大 Lyapunov 指数作性能指标。另一方面，随机稳定化需要半无限时间区间上的反馈控制，而遍历控制能满足这一要求，于是，随机稳定化可提为具有待定成本函数的遍历控制问题，其后成本函数由最大 Lyapunov 指数最小这一要求确定。

对拟不可积哈密顿系统，性能指标形如(102)，其中 f_1 为待定函数。最优控制系统的平均 Itô 方程形为[161]

$$dH = \bar{m}(H) + \bar{\sigma}dB(t) \quad (107)$$

式中

$$\bar{m}(H) = \bar{m}(H) + \langle u_i^* \frac{\partial H}{\partial P_i} \rangle \quad (108)$$

其中 $\langle \bullet \rangle$ 表示如方程(62)那样的平均。按方程(81)，最优控制的与未控的系统的最大 Lyapunov 指数之差为

$$\lambda_1^c - \lambda_1^u = \frac{1}{2} \bar{m}'(0) - \frac{1}{2} \bar{m}'(0) = \frac{d}{dH} \langle u_i^* \frac{\partial H}{\partial P_i} \rangle |_{H=0} \quad (109)$$

因此，拟不可积哈密顿系统的随机稳定化的任务是确定作为 H 与 u 的函数的 f_1 使得 λ_1^c 为负且绝对值尽可能大(负最大 Lyapunov 指数的绝对值可作为稳定裕度的一种度量)。这一控制策略已被应用于高斯白噪声参激的 Duffing 振子及两个非线性耦合的 van der pol 振子，结果表明总可达到稳定化的目的。

对拟可积与拟部分可积哈密顿系统，随机稳定化的步骤类似[162,163]。差别在于此时平均方程的维数高一些，并且没有最大 Lyapunov 指数的显式。虽然任务更困难但仍可完成。该策略已被应用于由线性阻尼与随机参激耦合在一起的一个线性振子与一个非线性振子，及高斯白噪声参激下的三自由度拟部分可积哈密顿系统。用最大 Lyapunov 指数稳定化的优点是比用控制 Lyapunov 函数的稳定化简单，而且受控系统的稳定裕度可度量。

此外，还提出了设计反馈控制使拟不可积的哈密顿系统渐近概率稳定化的步骤[164]。问题也提为具有待定成本函数的遍历控制。代替最大 Lyapunov 指数，此处考察平均哈密顿过程在其两端边界上的样本性态，任务是确定成本函数使平均哈密顿过程的平凡边界为越出或吸引自然(局部稳定化)，或平凡边界为越出或吸引自然，而另一边界为进入或排斥自然(全局或大范围稳定化)。

8.3 首次穿越损坏的反馈最小化

在机械/结构工程中，反馈控制大多用于减小响应，有时用于系统稳定化。非线性随机最优控制策略的一个崭新目标是使拟哈密顿系统的首次穿越损坏最小化[80,135,165]。这可提为可靠性函数的最大化或平均首次穿越时间的最长化。例如，对受控拟不可积哈密顿系统，部分平均 Itô 方程形如(97)，设安全域为 $[0, H_c)$ ，可靠性最大化控制问题的部分平均的性能指标是

$$J(\mathbf{u}) = P\{H(t, \mathbf{u}) \in [0, H_c), 0 \leq t \leq t_f\} \quad (110)$$

动态规划方程形为

$$\max_{\mathbf{u}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + [\bar{m}(H) + \langle u_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \rangle] \frac{\partial}{\partial H} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(H) \frac{\partial^2}{\partial H^2} \right\} V(t, H) = 0 \quad (111)$$

终时条件为

$$V(H, t_f) = 1, H \in [0, H_c) \quad (112)$$

边界条件为

$$V(H_c, t) = 0 \quad (113)$$

$$V(0, t) = \text{finite} \quad (114)$$

其中

$$V(H, t) = \max_{\mathbf{u}} P[H(s, \mathbf{u}) \in [0, H_c), t \leq s \leq t_f] \quad (115)$$

是值函数。

部分平均 Itô 方程为(97)的拟不可积哈密顿系统平均首次穿越时间最长化控制问题的性能指标为

$$J_1(\mathbf{u}) = E[\tau(H, \mathbf{u})] \quad (116)$$

式中 τ 是满足方程(97)的 $H(t)$ 的首次穿越时间。定义值函数为

$$V_1(H) = \max_{\mathbf{u}} E[\tau(H, \mathbf{u})] \quad (117)$$

则动态规划方程为

$$\max_{\mathbf{u}} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(H) \frac{\partial^2}{\partial H^2} + [\bar{m}(H) + \langle u_i \frac{\partial H}{\partial P_i} \rangle] \frac{\partial}{\partial H} \right\} V_1(H) = -1 \quad (118)$$

边界条件为

$$V_1(H_c) = 0 \quad (119)$$

$$V_1(0) = \text{finite} \quad (120)$$

注意，边界条件(114)与(120)是定性的而非定量的，可分别用动态规划方程(111)或(118)及边界 $H=0$ 上的漂移与扩散系数变成定量边界条件。

设控制力是有界的，则由动态规划方程(111)或(118)左边对 \mathbf{u} 求最大导出的最优控制是开关控制，即

$$u_i^* = -b_i \operatorname{sgn}(\dot{Q}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (121)$$

与值函数无关。将(121)中 u_i^* 代入(111)或(118)，并解所得之动态规划方程，将给出最优控制系统的可靠性函数或平均首次穿越时间。

对拟可积或拟部分可积哈密顿系统，可类似提出可靠性函数最大化与平均首次穿越时间最长化的控制问题[80,135]。其差别在于此时动态规划方程的维数高一些，也难解一些。该控制策略已被应用于谐和与高斯白噪声共同激励下的强非线性振子[166]。

8.4 部分可观测系统的最优控制

在上述控制策略中，乃假定系统的状态是完全已知的。而实际问题中，系统的状态是通过带有噪声的非直接测量经滤波估计得到的。因此，系统的状态是部分可观测的。这种同时计及滤波的控制称为部分可观测系统的控制。为了能将上述最优控制策略应用到实际工程结构中，有必要将上述最优控制策略推广到考虑系统状态部分可观测的情形。

8.4.1 线性受控系统 with 线性观测方程

对线性受控系统与线性观测方程，可应用分离原理[167,168]将部分可观测系统的最优控制问题转化为完全可观测线性系统的最优控制问题，然后再运用上述对完全可观测系统的非线性随机最优控制策略。这一非线性随机最优控制策略已被应用于地震地面运动或风激励下装有传感器与控制器的建筑结构[169,170]。

8.4.2 非线性受控系统与(或)非线性观测方程

对非线性受控系统与(或)非线性观测方程, 转化后的完全可观测系统一般是无限维的, 难以求最优控制。Charalambous and Elliott 证明[171], 如果上述两方程的非线性部分有势, 满足一定条件, 则非线性部分可观测受控系统可以转化为有限维完全可观测线性系统。据此, 施加一部分控制力使得系统方程与观测方程的非线性满足 Charalambous and Elliott 定理的条件, 将部分可观测非线性随机控制系统化为有限维完全可观测线性系统, 然后应用上述完全可观测线性系统的非线性随机最优控制策略[172]。今后一项困难的任务是进一步发展部分可观测一般非线性随机系统的最优非线性控制策略。

8.5 最优有界控制

8.5.1 Bang-Bang 控制

在实际工程应用中, 由于激励和响应的随机特性, 系统所需控制力往往会超过执行器的最大执行能力, 此时便会产生执行器饱和现象。如果控制器设计时未考虑执行器饱和问题, 那么这种意料之外的执行器饱和会使控制效果降低。若控制力是有界的, 例如

$$|u_i| \leq b_i, \quad b_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (122)$$

而性能指标与 $\mathbf{u}^{(2)}$ 无关, 即对拟不可积哈密顿系统的有限时间区间控制, 部分平均的性能指标为

$$J_2 = E[\int_0^{t_f} f_2(H(s))ds + g(H(t_f))] \quad (123)$$

对半无限时间区间控制, 部分平均的性能指标为

$$J_3 = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f_3(H(s))ds \quad (124)$$

动态规划方程形同(99)或(103), 只是非齐次项中无 $\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle$ 。最优控制律由动态规划方程关于 $\mathbf{u}^{(2)}$ 最小化得到, 是开关控制或 bang-bang 控制

$$u_i^* = -b_i \operatorname{sgn}(\dot{Q}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (125)$$

此时, 可不求解动态规划方程确定最优控制力。而最优控制系统的响应可从求解与完全平均 Itô 方程相应的 FPK 方程得到。该策略已被应用于在 Gaussian 白噪声外激与参激下悬挂于垂直与水平方向随机振动的弹簧摆与两个线性耦合的 Duffing 振子[173-175]。

8.5.2 最优无界控制与 bang-bang 控制的结合

为了改善 bang-bang 控制策略, 近来我们提出了计及执行器饱和的拟哈密顿系统的非线性随机最优控制策略[176-180]。该策略结合了最优无界控制与 bang-bang 控制, 其控制力形

为

$$u_i^* = \begin{cases} -F_i, & |F_i| < b_{ui} \\ -b_{ui} \operatorname{sgn}(F_i), & |F_i| < b_{ui} \end{cases}, \quad F_i = \frac{1}{2} R_{ij}^{-1} \frac{\partial H_r}{\partial P_j} \frac{\partial V}{\partial H_r}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (126)$$

数值结果显示该策略与 bang-bang 控制相比, 控制效果稍差, 但是控制效率高较多, 并且能有效减轻控制器颤振。

8.6 具有时滞控制的拟可积哈密顿系统的动力学与补偿

随机最优控制通常是指扩散过程的 Markov 控制, 反馈控制力是同一时刻上系统状态的函数。由于系统的测量与滤波, 控制力的计算与执行均需一定的时间, 实际的控制力往往是有时滞的。由于反馈控制力的时滞, 多数情况下会降低系统的控制效果和效率, 甚至可能引起系统的失稳。对受控拟可积哈密顿系统, 利用系统状态的随机周期性, 可将时滞控制力用无时滞系统状态近似表示, 从而可应用拟哈密顿系统随机平均法研究时滞控制力对系统响应[85,86,181,182]、稳定性[117,118]及可靠性[140,141]的影响。同时提出了两种补偿由控制力时滞而引起的受控系统稳定性与性能变差的方法。

8.7 非线性随机最优控制的鲁棒性

在上述控制理论中, 假设系统参数是确定的并且随机激励也是已知的。然而实际上, 系统与激励模型及其参数不一定能准确代表实际情况, 系统与激励在运行过程中也可能会发生变化, 因此, 必须考虑系统与随机激励的不确定性。基于不确定参数和随机激励的独立性, 可应用随机平均法和随机动态规划原理得到具平均参数值的名义拟哈密顿系统的非线性随机最优控制。然后, 应用随机平均法和概率分析得到不确定拟哈密顿系统均方根响应、控制效果和效率的均值和标准差。最后, 引进受控均方根响应、控制效果和效率的变差系数对不确定参数变差系数的敏感性作为鲁棒性评价指标, 对非线性随机最优控制的鲁棒性进行分析。研究表明上述非线性随机最优控制策略对系统不确定参数与激励具有很好的鲁棒性[183]。

8.8 极大极小最优控制

近来, 基于随机平均法和随机微分对策, 研究了不确定拟哈密顿系统的鲁棒控制, 提出了受有界参数和外部扰动的拟哈密顿系统的极小极大最优控制策略[184]。为实施对系统的能量控制, 首先应用拟哈密顿系统随机平均法得到关于系统能量的部分平均 Itô 随机微分方

程。结合上述方程和一个恰当的性能指标,寻求最坏情况下最优控制的目标通过求解一个随机微分对策问题实现。最坏情况扰动与相应的最优控制由 Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程之解确定。同时还提出了研究不确定拟哈密顿系统的反馈稳定化的方法[185]。首先,应用拟哈密顿系统随机平均法得到关于受控哈密顿量的部分平均 Itô 随机微分方程。然后,对于半无限长时间区间上的遍历控制,通过求解一个具有待定成本函数的随机微分对策问题确定系统的最坏情况扰动及相应的最优控制的形式。系统的概率为 1 渐近稳定性通过应用最大 Lyapunov 指数近似分析,最后以最坏扰动下最优控制系统的最大 Lyapunov 指数最小为准则确定成本函数。研究结果表明该控制策略具有很好的控制效果。

8.9 半主动控制

上述拟哈密顿系统的非线性随机最优控制策略具有如下优点:能应用于随机激励的多自由度强非线性系统;随机平均法使方程的维数降低并使得扩散矩阵非退化,从而简化了动态规划方程的求解;控制效果和效率比 LQG 法好;对系统不确定参数具有很好的鲁棒性,等。

对土木工程结构,主动控制装置通常需要很大的动力。然而,在某些情形下,例如发生地震时,没有这种动力。近来,设计了许多只要求小功率的半主动控制装置,例如磁流变或电流变阻尼器。这些阻尼器利用受控系统结构与阻尼器之间的相对运动产生控制力,阻尼系数可由外加磁场或电场加以调节。要应用这些阻尼器进行控制,需发展半主动控制策略。已为磁流变阻尼器提出许多半主动控制策略并已作了比较[186],其中最常用的是削去的线性二次高斯控制。应用随机平均法与动态规划原理,已用 Bingham[187]与 Bouc-Wen[188,189]模型发展了应用磁流变阻尼器的随机最优半主动控制策略。这一策略的一个特点是磁流变阻尼器可完全执行非线性随机最优控制策略而不必削去,控制效果与效率皆高于削去的线性二次高斯控制。这个半主动控制策略已被应用于风激建筑结构的控制[190]。

9 结语

本文概述了非线性随机动力学与控制的哈密顿理论研究的重要进展,包括精确平稳解、等效非线性系统法、随机平均法、随机稳定性、随机分岔、首次穿越时间及非线性随机最优控制,这些结果构成了一个非线性随机动力学与控制的哈密顿理论体系,为解决非线性随机动力学系统,特别是多自由度强非线性随机动力学系统的响应、稳定性、分岔、可靠性及控制问题提供一系列崭新而有效的办法。

虽然已取得重要进展, 仍需努力进一步发展该理论及其应用。例如, 将来一个重要的任务是寻求近似或数值求解高维 FPK 方程、后向 Kolmogorov 方程、广义 Pontryagin 方程及动态规划方程的方法。另一个任务是将该理论推广于更一般非线性系统与更一般随机激励。再一个重要的任务或许是开发该理论在各种科学、工程及经济领域中的应用。这些是我们将来的研究方向。此外, 本文中的某些结果, 如用哈密顿定义的模与最大 Lyapunov 指数公式, 尚需数学上严格的证明, 这给数学家留下了很多可做之工作。

参考文献

- [1] Bolotin VV(1984), *Random Vibration of Elastic Systems*, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague.
- [2] Ibrahim RA(1985), *Parametric Random Vibration*, Reserch Studies Press LTD, Taunton, England.
- [3] Dimentberg MF(1988), *Statistical Dynamics of Nonlinear and Time-Varying Systems*, Reserch Sdudies Press LtD, Taunton, England.
- [4] Roberts J B and Spanos PD(1990), *Random Vibration and Stctistical Linearization*, Wiley, New York.
- [5] 朱位秋 (1992), 随机振动, 科学出版社, 北京。
- [6] Soong TT and Grigoriu M (1993), *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*, PTR Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- [7] Soize C (1994), *The Fokker-Planck Equation for Stochastic Dynamical Systems and Its Explicit Steady State Solution*, World Scientific, Singapore.
- [8] Lin YK and Cai GQ (1995), *Probabilistic Structural Dynamics, Advanced Theory and Applications*, McGraw-Hill, New York.
- [9] Grigoriu M (1995), *Applied Non-Gaussian Processes; Examples, Theory, Simulations, Linear Random Vibration and MATLAB Solutions*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- [10] Khasminskii RZ (1980), *Stochastic Stability of Differential Equations*, Sijthoff and Noorchoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands.
- [11] Mao X (1994), *Exponential Stability of Stochastic Differential Equations*, Marcel Dekker Inc., New York.
- [12] Arnold L (1998), *Random Dynamical Systems*, Springer, Berlin
- [13] Stengel H (1986), *Stochastic Optimal Control*, Wiley, New York.
- [14] Fleming WH and Soner HM (1992), *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, New York.
- [15] Yong JM and Zhou XY (1999), *Stochastic Control, Hamiltonian Systems and HJB Equations*, Springer-Verlag, New York.
- [16] Ziegler F and Schuëller GI (eds) (1988), *Nonlinear Stochastic Dynamic Engineering Systems*, Proc. IUTAM Symp., Springer-Verlag, Berlin.
- [17] Bellomo N and Casciati F (eds) (1992), *Nonlinear Stochastic Mechanics*, Proc. IUTAM Symp. Springer-Verlag, Berlin.
- [18] Naess A and Krenk S (eds) (1996), *Advances in Nonlinear Stochastic Mechanics*, Proc. IUTAM Symp., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [19] Narayanan S and Iyengar RN (eds) (2001), *Nonlinearity and Stochastic Structueral Dynamics*, Proc.IUTAM Symp., Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.
- [20] Sri Namachchivaya N and Lin YK (eds) (2003), *Nonlinear Stochastic Dynamics*, Proc. IUTAM Symp.,

Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

- [21] Crandall SH and Zhu WQ (1983), Random Vibration: a survey of recent developments, *ASME J. Appl. Mech.* **50**, 50th Anniversary Issue, 953-962.
- [22] Sehuëller GI (ed) (1997), A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics, *Prob. Engrg. Mech.* **12**, 197-321.
- [23] Zhu WQ and Cai GQ (2002), Nonlinear stochastic dynamics: a survey of recent developments, *Acta Mechanica Sinica* **18**, 551-566.
- [24] 朱位秋 (2003), 非线性随机动力学与控制-Hamiltonian 理论框架, 科学出版社, 北京。
- [25] Tabor M (1989), *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics, An Introduction*, Wiley & Sons, New York.
- [26] Arnold VI (1989), *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York.
- [27] Arnold VI, Kozlov VV and Neishtadt AI (1988), *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, In Dynamical Systems III, Viarnold (ed)*, Springer-Verlag, New York.
- [28] Boundtis T, Segar H and Vivaldi F (1982), Integrable Hamiltonian systems and the Painleve property, *Phys. Rev. A, Third Series*, **25**, 1257-1264.
- [29] Whittaker ET (1964), *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [30] Hénon M and Heiles C (1964), The Applicability of the third integral of motion; some numerical experiments, *Astronomy J.* **69**, 73-79.
- [31] Fuller AT (1969), Analysis of nonlinear stochastic systems by means of the Fokker-Planck equation, *Int. J. Control* **9**, 603-655.
- [32] Zhu WQ, Cai GQ and Lin YK (1990), On exact stationary solutions of stochastically perturbed Hamiltonian systems, *Prob. Engrg. Mech.* **5**, 84-87.
- [33] Zhu WQ, Cai GQ and Lin YK (1992), Stochastically perturbed Hamiltonian systems, in Ref. 17, 543-552.
- [34] Caughey TK (1971), Nonlinear theory of random vibration, *Advances in Applied Mechanics* **11**, Academic Press, New York.
- [35] Caughey TK and Ma F (1982), The exact steady-state solution of a class of nonlinear stochastic systems, *Int. J. Non-Linear Mech.* **17**, 137-142.
- [36] Caughey TK and Ma F (1982), The steady-state response of a class of dynamical systems to stochastic excitation, *ASME J. Appl. Mech.* **49**, 629-632.
- [37] Dimentberg MF (1982), An exact solution to a certain nonlinear random vibration problem, *Int. J. Non-Linear Mech.* **17**, 231-236.
- [38] Lin YK and Cai GQ (1988), Exact stationary-response solution for second order nonlinear systems under parametric and external excitations, part II. *ASME J. Appl. Mech.* **55**, 702-705.
- [39] Zhu WQ(1990), Exact solutions for stationary responses of several classes of nonlinear systems under parametric and external white noise excitations. *J. Appl. Math. Mech.* **11**, 165-175.
- [40] Zhu WQ and Yang YQ (1996), Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated integrable Hamiltonian systems, *ASME J. Appl. Mech.* **63**, 493-500.
- [41] Huang ZL, Liu ZH and Zhu WQ (2004), Stationary response of multi-degree-of-freedom vibro-impact systems under white noise excitations, *J. Sound Vib.* **275**, 223-240.
- [42] Cai GQ and Lin YK (1996), Exact and approximate solutions for randomly excited MDOF nonlinear systems, *Int. J. Non-Linear Mech.* **31**, 647-623.
- [43] Zhu WQ and Huang ZL (2001), Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated partially integrable Hamiltonian systems, *Int. J. Non-Linear Mech.* **36**, 39-48.
- [44] Ying ZG and Zhu WQ (2000), Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated gyroscopic

- systems, *Int. J. Non-Linear Mech.* **35**, 837-848.
- [45] Huang ZL and Zhu WQ (2000), Exact stationary solutions of stochastically and harmonically excited and dissipated integrable Hamiltonian systems, *J. Sound Vib.* **230**, 709-720.
- [46] 黄志龙, 几类非线性随机系统动力学与控制研究, 博士学位论文.
- [47] Caughey TK (1986), On response of nonlinear oscillators to stochastic excitation, *Prob Engrg. Mech.* **1**, 2-4.
- [48] Lutes LD (1970), Approximate technique for treating random vibration of hysteretic systems, *J. Acous. Soc. Am.* **48**, 299-306.
- [49] Cai GQ and Lin YK (1988), A new approximate solution technique for randomly excited nonlinear oscillators, *Int. J. Non-Linear Mech.* **23**, 409-420.
- [50] Zhu WQ and Yu JS (1989), The equivalent nonlinear system method, *J. Sound Vib.* **129**, 385-395.
- [51] To CWS and Li DM (1991), Equivalent nonlinearization of nonlinear systems to random excitation, *Prob. Engrg. Mech.* **6**, 184-192.
- [52] Lei Z and Qiu C (1996), A new equivalent non-linearization method for random vibration of nonlinear systems, *Mech. Res. Commu.* **23** 131-136.
- [53] Zhu WQ, Soong TT and Lei Y (1994), Equivalent nonlinear system method for stochastically excited Hamiltonian systems, *ASME J. Appl. Mech.* **61**, 618-623.
- [54] Zhu WQ and Lei Y (1997), Equivalent nonlinear system method for stochastically excited and dissipated integrable Hamiltonian systems, *ASME J. Appl. Mech.* **64**, 209-216.
- [55] Zhu WQ and Deng ML (2004), Equivalent nonlinear systems method for stochastically excited and dissipated integrable Hamiltonian systems-resonant case, *J. Sound Vib.* **274**, 1110-1122.
- [56] Zhu WQ, Huang ZL and Suzuki Y (2001), Equivalent nonlinear system method for stochastically excited and dissipated partially integrable Hamiltonian systems. *Int. J. Non-linear Mech.* **36**, 773-786.
- [57] Stratonovich RL (1963, 1967), *Topics in the Theory of Random Noise*, Vol.1 and 2, Gordon Breach, New York.
- [58] Khasminskii RZ (1966), A limit theorem for solution of differential equations with random right-hand side, *Theory Prob. Appl.* **11**,390-406.
- [59] Papanicolaou GC and Kohler W (1974), Asymptotic theory of mixing stochastic ordinary differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **27** ,641-668.
- [60] Blankenship GL and Papanicolaou GC (1978), Stability and control of stochastic systems with wide-band noise disturbances I, *SIAM J. Appl. Math.* **34**,437-476.
- [61] Landa PS and Stratonovich RL(1962), Theory of stochastic transition of various systems between states, *Vestnik MGU (Proc. Moscow Univ.)* III, 33-45 (in Russian).
- [62] Khasminskii RZ (1964), Behavior of a conservative system with small friction and small random noise, *Prikladnaya Matematika i Mehanika (Appl. Math. Mech.)* **28**, 1126-1130 (in Russian).
- [63] Roberts JB (1982), Energy method for nonlinear systems with non-white excitation, *Random Vibrations and Reliability*, Proc. IUTAM Symp. K Hennig (ed), Academic –Verlag, Berlin, 285-294.
- [64] Red-Horse JR and Spanos PD (1992), A generalization to stochastic averaging in random vibration, *Int. J. Non-linear Mech.* **27**,85-101.
- [65] Cai GQ and Lin YK(2001), Random vbration of strongly nonlinear systems. *Nonl. Dyn.* **24**, 3-15.
- [66] Zhu WQ, Huang ZL and Suzuke Y (2001), Response and stability of strongly nonlinear oscillators under wide-band random excitation, *Int. J. Non-Linear Mech.* **36**, 1235-1250.
- [67] Huang ZL and Zhu WQ (2000), Stochastic averaging of strongly nonlinear oscillators under combined harmonic and white noise excitations, *J. Sound Vib.* **238**, 233-256.
- [68] Huang ZL, Zhu WQ, Ni YQ and Ko JM (2002), Stochastic averaging of strongly nonlinear oscillator under

- bounded noise excitation, *J. Sound Vib.* **254**, 245-267.
- [69] Sri Namachchivaya N and Sowers RB (2002), Rigorous stochastic averaging at a center with additive noise, *Meccanica* **37**, 85-114.
- [70] Freidlin MI and Wentzell AD (1998), *Random Perturbation of Dynamical Systems*, 2nd ed, Springer-Verlag, Berlin.
- [71] Sowers RB (2004), Stochastic averaging near homoclinic orbits via singular perturbations, in Ref. 20.
- [72] Roberts JB and Spanos PD (1986), stochastic averaging: an approximate method of solving random vibration problems, *Int. J. Non-Linear Mech.* **21**, 111-134.
- [73] Zhu WQ (1988), Stochastic averaging methods in random vibration, *ASME Appl. Mech. Revs.* **41**(5), 189-199.
- [74] Zhu WQ (1996), Recent developments and applications of the stochastic averaging method in random vibration, *ASME Appl. Mech. Revs.* **49**(10), s72-s82.
- [75] Zhu WQ and Yang YQ (1997), Stochastic averaging of quasi-nonintegrable-Hamiltonian systems, *ASME J. Appl. Mech.* **64**, 157-164.
- [76] Khasminskii RZ (1968), On the averaging principle for Itô stochastic differential equations, *Kibernetka* **3**, 260-279 (in Russian).
- [77] Zhu WQ, Huang ZL and Yang YQ (1997), Stochastic averaging of quasi integrable Hamiltonian systems, *ASME J. Appl. Mech.* **64**, 975-984.
- [78] Zhu WQ, Huang ZL and Suzuki Y (2002), Stochastic averaging and Lyapunov exponent of quasi partially integrable Hamiltonian systems, *Int. J. Non-linear Mech.* **37**, 419-437.
- [79] Deng ML, Zhu WQ (2007), Stochastic averaging of m dof quasi-integrable hamiltonian systems under wide-band random excitation. *J. Sound Vib.* **305**(4-5), 783-794.
- [80] Zhu WQ, Deng ML and Huang ZL (2003), Optimal bounded control of first-passage failure of quasi integrable Hamiltonian systems with wide-band random excitation, *Nonl. Dyn.* **33**, 189-207.
- [81] Huang ZL and Zhu WQ (1997), Exact stationary solutions of averaged equations of stochastically and harmonically excited MDOF quasi-linear systems with internal and / or external resonance, *J. Sound Vib.* **204**, 249-258.
- [82] Huang ZL and Zhu WQ (2004), Stochastic averaging of quasi integrable Hamiltonian Systems under combined harmonic and white noise excitations, *Int. J. Non-linear Mech.* **39**, 1421-1434.
- [83] Huang ZL and Zhu WQ (2004), Stochastic averaging of quasi integrable Hamiltonian Systems under bounded noise excitation. *Prob. Engrg. Mech.* **19**, 219-228.
- [84] Huang ZL and Zhu WQ (2005), Averaging method for quasi-integrable Hamiltonian systems, *J. Sound Vib.* **284**(1-2), 325-341.
- [85] Liu ZH, Zhu WQ (2007), Stochastic Averaging of Quasi-Integrable Hamiltonian Systems with Delayed Feedback Control. *J. Sound Vib.* **299**, 178-195.
- [86] Zhu WQ, Liu ZH (2007), Response of quasi-integrable Hamiltonian systems with delayed feedback bang-bang control. *Nonlinear Dyn.* **49**, 31-47.
- [87] Huang ZL, Zhu WQ (2008). Stochastic averaging of quasi generalized Hamiltonian systems, *Int. J. Non-Linear Mech.*, in press.
- [88] Zhu WQ, Lei Y (1988), Stochastic averaging of energy envelope of bilinear hysteretic systems. nonlinear stochastic dynamic engineering systems, *Proceedings of IUTAM Symposium*, Innsbruck, Austria 1987, Ziegler F & Schueller GI (eds.), Berlin: Springer-Verlag, 381-391.
- [89] Zhu WQ, Lin YK (1991), Stochastic averaging of energy envelope. *ASCE J. Engrg. Mech.* **117**(8), 1890-1905.

- [90] Ying ZG, Zhu WQ, Ni YQ, Ko JM (2002), Stochastic averaging of duhem hysteretic systems. *J. Sound Vib.* 2002, 254(1): 91-104.
- [91] Wang Y, Ying ZG, Zhu WQ (2008). Stochastic averaging of energy envelope of Preisach hysteretic systems. Submit.
- [92] Deng ML and Zhu WQ (2003), Stationary motion of active Brownian Particle, *Phys. Rev. E*, **69**, 046105, 1-9.
- [93] Zhu WQ, Deng ML (2005), Stationary Swarming Motion of Active Brownian Particles in Parabolic External Potential, *Phys. A*, **354**, 127-142.
- [94] Wu Y, Zhu WQ (2008), Stationary response of MDOF dissipated Hamiltonian systems to Poisson white noises. *ASME J. Appl. Mech.* **75**(4), 044502.
- [95] Wu Y, Zhu WQ (2008), Stationary response of multi-degree-of-freedom vibro-impact systems to Poisson white noises. *Phys. Lett. A* **372**(5), 623-630.
- [96] Wu Y, Zhu WQ (2008), Stochastic analysis of a pulse-type prey-predator model, *Phys. Rev. E*, 2008, **77**(4), 041911.
- [97] Kozin F (1969), A survey of stability of stochastic systems, *Automatica*. **5**(1), 95-112.
- [98] Naprestek J(1996), Stochastic exponential and asymptotic stability of simple nonlinear systems. *Int J Non-Linear Mech.* **31**(5), 693-705
- [99] Oseledec VI (1968), A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.* **19**, 197-231.
- [100] Khasminskii RZ (1967), Necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of linear stochastic systems, *Theory of Prob. Appl.* **11**, 144-147.
- [101] Kozin F and Zhang ZY (1991), On almost sure sample stability of nonlinear *Itô* differential equations, *Prob. Engrg. Mech.* **6**(2), 92-95.
- [102] Talay D (1999), Lyapunov exponent of the Euler scheme for stochastic differential equation, In: *Stochastic Dynamics*, H Crauel and M Gundlach (eds), Springer-Verlag, New York, 241-258.
- [103] Wihstutz V (1999), Perturbation methods for Lyapunov exponents, In: *Stochastic Dynamics*, H Crauel and M Gundlach (eds), Springer-Verlag, New York, 209-239.
- [104] Ariaratnam S T and Xie W-C (1992), Lyapunov exponents and stochastic stability of coupled linear systems under real noise excitation, *ASME J. Appl. Mech.* **59**, 664-673.
- [105] Ariaratnam ST and Abdelrahman NM (2003), Stochastic stability of coupled oscillators in internal resonance, in Ref.20.
- [106] Arnold L (1984), A formula connecting sample and moment stability of linear stochastic systems. In: *Lyapunov Exponents (Lecture Notes in Mathematics 1186)*, L Arnold and V Wihstutz (eds), Springer-Verlag, Berlin, 793-802.
- [107] Arnold L, Doyle MM and Sri Namachchivaya N (1997), Small noise expansion of moment Lyapunov exponents for two dimensional systems, *Dyn. Stab. Syst.* **12** (3), 187-211.
- [108] Khasminskii RZ and Moshchuk N (1998), Moment Lyapunov exponent and stability index for linear conservative system with small random perturbation, *SIAM J. Appl. Math.* **58** (1), 245-256.
- [109] Xie WC (2001), Moment Lyapunov exponent of a two-dimensional system under real noise excitation. *J. Sound Vib.* **239** (1), 139-155.
- [110] Horsthemke W and Lefever R (1984), *Noise-Induced Transition*, Springer-Verlag, Berlin.
- [111] Sri Namachchivaya N (1990), Stochastic bifurcation, *Appl. Math. Comput.* **38** (1), 101-159.
- [112] Arnold L (2001), Recent progress in stochastic bifurcation theory, In Ref. 19, 15-27.
- [113] Zhu WQ (2004), Lyapunov exponent and stochastic stability of quasi non-integrable Hamiltonian systems, *Int. J. Non-Linear Mech.* **39**, 645-655.

- [114] Pardoux E and Wihstutz V (1988), Lyapunov exponent and rotation number of two-dimensional linear stochastic systems with small diffusion, *SIAM J. Appl. Math.* **48**, 442-457.
- [115] Zhu WQ and Huang ZL (1999), Lyapunov exponent and stochastic stability of quasi integrable Hamiltonian systems, *ASME J. Appl. Mech.* **66**, 211-217.
- [116] Huang ZL and Zhu WQ (2000), Lyapunov exponent and almost sure asymptotic stability of quasi-linear gyroscopic systems, *Int. J. Non-Linear Mech.* **35**, 645-655.
- [117] Liu ZH, Zhu WQ (2008), Asymptotic Lyapunov stability with probability one of quasi-integrable Hamiltonian systems with delayed feedback control. *Automatica*, **44**, 1923-1928.
- [118] Li XP, Liu ZH, Zhu WQ (2008), Asymptotic Lyapunov stability with probability one of quasi linear systems subject to delayed feedback control and wide-band random excitation. Submit.
- [119] Huang ZL and Zhu WQ (2003), A new approach to almost-sure asymptotic stability of stochastic systems of higher dimension, *Int. J. Non-Linear Mech.* **38**, 239-247.
- [120] Zhu WQ and Huang ZL (1998), Stochastic stability of quasi-non-integrable-Hamiltonian systems, *J. Sound Vib.* **218**, 769-789.
- [121] Zhu WQ and Huang ZL (1999), Stochastic Hopf bifurcation of quasi non-integrable Hamiltonian systems, *Int. J. Non-Linear Mech.* **34**, 437-447.
- [122] Liu ZH, Zhu WQ (2008), Stochastic Hopf bifurcation of quasi-integrable Hamiltonian systems with time-delayed feedback control, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*.
- [123] Lyon RH, Heckl M and Hazelgrove CB (1961), Response of hard-spring oscillator to narrow-band excitation, *J. Acoust. Soc. Am.* **33**, 1404-1411.
- [124] Zhu WQ, Lu MQ and Wu QT (1999), Stochastic jump and bifurcation of a Duffing oscillator under narrow-band excitation, *J. Sound Vib.* **165**, 285-304.
- [125] Kapitaniak T (1986), Chaotic distribution of nonlinear systems perturbed by random noise, *Phys. Let. A.* **116**, 251-254.
- [126] Bulsara AR, Schieve WC and Jacobs EW (1990), Homoclinic chaos in systems perturbed by weak Langevin noise, *Phys. Rev.* **41**, 668-681.
- [127] Frey M and Simiu E (1993), Noise induced chaos and phase space flux, *Physica D* **63**, 321-340.
- [128] Liu WY, Zhu WQ and Huang ZL (2001), Effect of bounded noise on chaotic motion of Duffing oscillator under parametric excitation, *Chaos, Solitons and Fractals* **12**, 527-537.
- [129] Liu ZH and Zhu WQ (2004), Homoclinic bifurcation and chaos in simple pendulum under bounded noise excitation, *Chaos, Solitons and Fractals* **20**, 593-607.
- [130] Zhu WQ and Liu ZH (2005), Homoclinic bifurcation and chaos in coupled simple pendulum and harmonic oscillator under bounded noise excitation, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **15**(1).
- [131] Roberts JB (1986), First-passage probabilities for randomly excited systems: diffusion methods, *Prob. Engrg. Mech.* **1**, 66-81.
- [132] Cai GQ and Lin YK (1994), On statistics of first-passage failure, *ASME J. Appl. Mech.* **61** (1), 93-99.
- [133] Gan CB and Zhu WQ (2001), First-passage failure of quasi-non-integrable-Hamiltonian systems, *Int. J. Non-Linear Mech.* **36**, 209-220.
- [134] Zhu WQ, Deng ML and Huang ZL (2002), First-passage failure of quasi-integrable Hamiltonian systems, *ASME J. Appl. Mech.* **69**, 274-282.
- [135] Zhu WQ, Huang ZL and Deng ML (2003), First-passage failure and its feedback minimization of quasi-partially integrable Hamiltonian systems, *Int. J. Non-Linear Mech.* **38**, 1133-1148.
- [136] Zhu WQ and Lei Y (1989), First passage time for state transition of randomly excited systems, *Proc. of 47th Session of Int. Statistical Inst.* Vol LIII (Invited papers), Book3, 517-531.

- [137] Zhu WQ and Wu YJ (2003), First-passage time of Duffing oscillator under combined harmonic and white-noise excitations, *Nonl. Dyn.* **32**, 291-305.
- [138] Wu YJ, Luo M, Zhu WQ (2008), First-passage failure of strongly nonlinear oscillators under combined harmonic and real noise excitations, *Arch. Appl. Mech.* **78**(7), 501-515.
- [139] Chen LC, Zhu WQ (2008), The first passage failure of SDOF strongly nonlinear stochastic system with fractional derivative damping, *J. vib. control*, in press.
- [140] Liu ZH, Zhu WQ (2008), First-passage failure of quasi-integrable Hamiltonian systems under time-delayed feedback control, *J. Sound Vib.* **315**(1-2), 301-317.
- [141] Li XP, Liu ZH, Zhu WQ (2008), First-passage failure of quasi linear systems subject to multi-time-delayed feedback control and wide-band random excitation, *Probab. Engrg. Mech.* DOI: 10.1016/j.pro bengmech.2008.04.002.
- [142] Deng ML, Zhu WQ (2007), Energy diffusion controlled reaction rate in dissipative Hamiltonian systems. *Chinese Phys.* **16**(6), 1510-1515.
- [143] Deng ML, Zhu WQ (2007), Energy diffusion controlled reaction rate of reacting particle driven by broad-band noise. *Euro. Phys. J. B*, **59**(3), 391-397.
- [144] Kramers HA (1940), Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions, *Physica (Utrecht)* **7**, 284.
- [145] Deng ML, Zhu WQ (2008), Fermi resonance and its effect on the mean transition time and rate, *Phys. Rev. E* **77**, 061114.
- [146] Deng ML, Zhu WQ (2007), On the stochastic dynamics of molecular conformation. *J. Zhejiang Univ. Sci. A* **8**(9), 1401-1407.
- [147] Deng ML, Zhu WQ (2008), Stochastic dynamics and denaturation of thermalized DNA, *Phys. Rev. E* **77**(2), 021918.
- [148] Housner GW, et al. (1997), Structural control: past, present and future, *ASCE J. Engrg. Mech.* **123**, 897-971.
- [149] Yoshida K (1984), A method of optimal control of non-linear stochastic systems with non-quadratic criteria, *Int. J. Control* **39** (2), 279-291.
- [150] Chang RJ (1991), Optimal linear feedback control for a class of nonlinear non-quadratic non-Gaussian problem, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr.* **113** (4), 569-574.
- [151] Liberzon D and Brockett RW (2000), Nonlinear feedback systems perturbed by noise: steady-state probability distribution and optimal control, *IEEE Autom. Contr.* **45** (6), 1116-1130.
- [152] Bratus A and Dimentberg M, et al, (2000), Hybrid solution method for dynamic programming equations for MDOF stochastic systems, *Dyn Contr*, **10** (1), 107-116.
- [153] Crespo LG and Sun JQ (2003), Nonlinear stochastic control via stationary response design, *Prob. Engrg. Mech.* **18**, 79-86.
- [154] Kushner HJ (1990), Weak convergence methods and Singularly perturbed stochastic control and filtering problems, Birkhauser, Boston.
- [155] Kushner HJ and Rungguldiar (1987), Nearly optimal state feedback control for stochastic systems with wide-band noise disturbances, *SIAM J. Contr. Optim.* **25**, 298.
- [156] Zhu WQ and Ying ZG (1999), Optimal nonlinear feedback control of quasi-Hamiltonian systems, *Science in China, Series A* **42**, 1213- 1219.
- [157] Zhu WQ, Ying ZG and Soong TT (2001), An optimal nonlinear feedback control strategy for randomly excited structural systems, *Nonl. Dyn.* **24**, 31-51.
- [158] Zhu WQ, Ying ZG, Ni YQ, and KOJM (2000), Optimal nonlinear stochastic control of hysteretic structures, *ASCE J. Engrg. Mech.* **126**, 1027-1032.

- [159] Wang Y, Ying ZG and Zhu WQ (2008), Nonlinear stochastic optimal control of Preisach hysteretic systems. *Prob. Engrg. Mech.* DOI 10.1016/5.probengmech.2008.07.003.
- [160] Florchinger P (1997), Feedback stabilization of affine in the control stochastic differential systems by the control Lyapunov function method, *SIAM J. Contr. Optim.* **35**, 500-511.
- [161] Zhu WQ (2004), Feedback stabilization of quasi non-integrable Hamiltonian systems by using Lyapunov exponent, *Nonl. Dyn.* **36**, 455-470.
- [162] Zhu WQ and Huang ZL (2003), Feedback stabilization of quasi-integrable Hamiltonian systems, *ASME J. Appl. Mech.* **70**, 129-136.
- [163] Zhu WQ and Huang ZL (2003), Stochastic stabilization of quasi partially-integrable Hamiltonian systems by using Lyapunov exponent, *Nonl. Dyn.* **33**, 209-224.
- [164] Zhu WQ and Huang ZL (2004), Stochastic stabilization of quasi non-integrable Hamiltonian systems, *Int. J. Non-Linear Mech.* **39**, 879-895.
- [165] Zhu WQ, Huang ZL and Deng ML (2002), Feedback minimization of first-passage failure of quasi non-integrable Hamiltonian systems, *Int.J. Non-Linear Mech.* **37**, 1057-1071.
- [166] Zhu WQ and Wu YJ (2004), Optimal bounded control of first-passage failure of strongly nonlinear oscillators under combined harmonic and white noise excitations, *J. Sound Vib.* **271** (1), 83-101.
- [167] Wonham WM (1968), On the separation theorem of stochastic control, *SIAM J. Contr.* **6**, 312-326.
- [168] Bensoussan A (1992), *Stochastic Control of Partially Observable Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [169] Zhu WQ and Ying ZG (2002), Nonlinear stochastic optimal control of partially observable linear structures, *Engrg. Struct.* **24**, 333-342.
- [170] Zhu WQ, Luo M and Ying ZG (2004), Nonlinear stochastic optimal control of tall buildings under wind loading, *Engrg. Struct.* **26**, 1561-1572.
- [171] Charalambous CD and Elliott RJ (1998), Classes of nonlinear partially observable stochastic optimal control problems with explicit optimal control law, *SIAM J. Contr. Optim.* **36**, 542-578.
- [172] Zhu WQ and Ying ZG (2004), On stochastic optimal control of partially observable nonlinear quasi Hamiltonian systems, *J. Zhejiang Univ. Sci.* **5** (11), 1313-1317.
- [173] Zhu WQ and Deng ML (2004), Optimal bounded control for minimizing the response of quasi non-integrable Hamiltonian systems, *Nonl. Dyn.* **35**, 81-100.
- [174] Zhu WQ and Deng ML (2004), Optimal bounded control for minimizing the response of quasi integrable Hamiltonian systems. *Int. J. Non-linear Mech.* **39**, 1535-1546.
- [175] Zhu WQ and Wu YJ (2005), Optimal bounded control of strongly nonlinear oscillator under combined harmonic and white-noise excitations, *Prob. Engrg. Mech.* **20** (1) 1-9.
- [176] Ying ZG, Zhu WQ (2006), A Stochastically Averaged Optimal Control Strategy for Quasi-Hamiltonian Systems with Actuator Saturation. *Automatica*, **42** (9), 1577-1582.
- [177] Huan RH, Zhu WQ, Wu YJ (2008), Nonlinear stochastic optimal bounded control of hysteretic systems with actuator saturation. *J. Zhejiang Univ. SCIENCE A*, **9**(3), 351-357.
- [178] Huan RH, Zhu WQ (2008), Stochastic optimal bounded control of MDOF quasi non-integrable Hamiltonian systems with actuator saturation. *Archive Appl. Mech.* DOI: 10.1007/s00419-008-0218-5.
- [179] Huan RH, Zhu WQ (2008), Stochastic optimal control of quasi integrable Hamiltonian systems subject to actuator saturation. *J. Vib. Control*, in press.
- [180] Feng CS, Zhu WQ (2008), Stochastic optimal control of strongly non-linear systems under wide-band random excitation with actuator saturation. *Acta Mech. Solida Sinica*, in press.
- [181] Li XP, Liu ZH, Zhu WQ (2008), Stochastic averaging of quasi linear systems subject to multi- time-delayed

- feedback control and wide-band random excitation. *J. vib. control*, in press.
- [182] Feng CS, Zhu WQ (2008), Response of harmonically and stochastically excited strongly nonlinear oscillators with delayed feedback bang-bang control. *J. Zhejiang Univ. SCIENCE A*, in press.
- [183] Wang Y, Ying ZG, Zhu W Q, Robustness of nonlinear stochastic optimal control for quasi Hamiltonian systems with parametric uncertainty, *Int. J. Systems Science*, in press.
- [184] Wang Y, Ying ZG, Zhu WQ, A minimax optimal control strategy for stochastic uncertain quasi Hamiltonian systems, *J. Zhejiang Univ. SCIENCE A*, in press.
- [185] Wang Y, Ying ZG, Zhu, WQ (2008), Feedback stabilization of stochastic uncertain quasi-Hamiltonian systems, submit.
- [186] Jansen LM and Dyke SJ (2000), Semi-active control strategy for MR dampers: comparative study, *ASCE J. Engrg. Mech.* **126**, 795-803.
- [187] Ying ZG, Zhu WQ and Soong TT (2003), A stochastic optimal semi-active control strategy for ER/MR dampers, *J. Sound Vib.* **259**, 45-62.
- [188] Dong L, Ying ZG and Zhu WQ (2004), Stochastic optimal semi-active control of nonlinear systems using MR damper, *Adv. Struct. Engrg.* **7**, 485-494.
- [189] Cheng H, Zhu WQ, Ying ZG (2006), Stochastic optimal semi-active control of hysteretic systems by using a magneto-rheological damper. *Smart Materials and Structures*, **15**(3), 711-718.
- [190] Zhu WQ, Luo M and Dong L (2004), Semi-active control of wind excited building structures using MR/ER dampers, *Probab. Engrg. Mech.* **19**, 279-285.

非线性随机动力学与控制的 哈密顿理论体系

朱位秋

浙江大学航空航天学院
应用力学研究所

主要内容:

一、随机激励的耗散的哈密顿系统的动力学

二、拟哈密顿系统的非线性随机最优控制

一、随机激励的耗散的哈密顿系统的动力学

- 1、基本学术思想
- 2、非线性随机动力学系统的哈密顿表示与分类
- 3、精确平稳解
- 4、等效非线性系统法
- 5、拟哈密顿系统随机平均法
- 6、随机稳定性与分岔
- 7、首次穿域损坏
- 8、小结

1、基本学术思想

经多年研究发现，研究多自由度强非线性随机系统动力学很困难的的一个主要原因在于传统上随机动力学在拉格朗日体系内进行研究，缺少描述在相空间中各自由度之间全局关系的概念。而在哈密顿体系中有可积性与共振性这两个概念，可以克服上述困难。

基本学术思想

(受控) 非线性随机动力学系统

哈密顿系统
(保守系统)

+

耗散

+

随机激励

+

控制

(受控) 随机激励的耗散的哈密顿系统

不可积

可积
非共振

可积
共振

部分可积
非共振

部分可积
共振

2、非线性随机动力学系统的哈密顿表示与分类

n 自由度非线性随机动力学系统的运动方程可表为

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H}{\partial Q_i} - c_{ij}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \frac{\partial H}{\partial P_j} + f_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \xi_k(t) + u_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P})\end{aligned}\quad (1)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$$

一般 (1) 是非线性的，称为随机激励的、耗散的哈密顿系统。

(1)的核心是哈密顿系统，这里考虑的是理想、完整、自治哈密顿系统，以哈密顿量 $H=H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ 表征。

设 n 自由度哈密顿系统有 r 个独立、对合的首次积分，

当 $r=1$ 时，称该哈密顿系统为不可积的

当 $r=n$ 时 称为（完全）可积的

当 $1 < r < n$ 时称为部分可积的

当哈密顿系统可积时，可引入作用-角变量 I_i 、 θ_i 。此时，哈密顿量形为 $H=H(\mathbf{I})$ ，而哈密顿方程形为

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H(\mathbf{I})}{\partial I_i} = \omega_i(\mathbf{I}) \quad , \dot{I}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

其解为

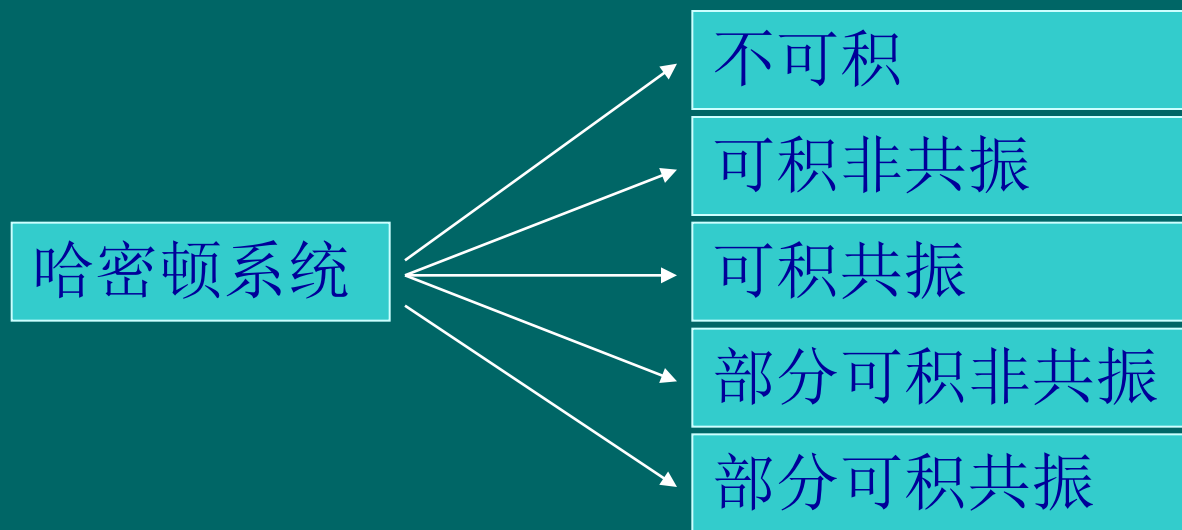
$$I_i = \text{const}, \theta_i = \omega_i(\mathbf{I})t + \delta_i \quad , i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$\omega_i(\mathbf{I})$ 为该可积哈密顿系统固有频率。若这些频率满足如下共振关系

$$k_i^u \omega_i(\mathbf{I}) = 0 \quad , i = 1, 2, \dots, n \quad , u = 1, 2, \dots, \alpha \quad (4)$$

式中 k_i^n 为整数，则称该哈密顿系统为（内）共振的， $\alpha=0$ 时称为非（内）共振的。

于是，按与（1）相应的哈密顿系统的可积性与共振性，可将（1）分成五种情形：



3、精确平稳解

当 (1) 中 $u_i = 0$, $\xi_k(t)$ 皆为高斯白噪声时, 响应为扩散马尔可夫过程, 可用FPK方程法求其精确解。与 (1) 等价的

$It\hat{o}$ 方程形为

$$dQ_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} dt \quad (5)$$

$$dP_i = - \left(\frac{\partial H}{\partial Q_i} + m_{ij}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \frac{\partial H}{\partial P_j} \right) dt + \sigma_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) dB_k(t)$$

式中， $\sigma\sigma^T = 2fDf^T$ ， $2D$ 为 $\xi_\kappa(t)$ 的强度矩阵， m_{ij} 为修正后拟线性阻尼系数。与（5）相应的FPK方程形为

$$\frac{\partial p}{\partial t} + [H, p] = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} p \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} (b_{ij} p) \quad (6)$$

p 为 $[Q^T, P^T]^T$ 的转移概率密度， $b = \sigma\sigma^T$ 。
鉴于求（6）之瞬态解极为困难，一般求（6）之平稳解，即 $\partial p / \partial t = 0$ 时的平稳FPK

方程 (6) 之解，亦即当系统达到统计平衡时之解。

已经证明，(6) 之平稳解的泛函形式取决于与 (5) 相应的哈密顿系统的可积性与共振性。当该哈密顿系统不可积时，其解形为

$$p(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = C \exp[-\lambda(\mathbf{H})] \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \quad (7)$$

式中C为归一化系数。当该哈密顿系统可积非共振时，(6) 之平稳解为

$$p(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = C \exp[-\lambda(\mathbf{H})] |_{\mathbf{H}=\mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \quad (8)$$

或

$$p(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = C \exp[-\lambda(\mathbf{I})] |_{\mathbf{I}=\mathbf{I}(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \quad (9)$$

式中 $\mathbf{H} = [H_1 \ H_2 \ \cdots \ H_n]^T$ 为相应哈密顿系统的个独立、对合的首次积分组成的矢量。当相应哈密顿系统为可积共振时，（6）之平稳解分别为

$$p(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = C \exp[-\lambda(\mathbf{I}, \quad)]|_{\mathbf{I}=\mathbf{I}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{q}, \mathbf{p}} \quad (10)$$

式中 $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \cdots \psi_\alpha]^T$, $\psi_n = k_i^n \theta_i$ 为成共振关系的各自由度的角变量组合。类似地, 当相应哈密顿系统为部分可积非共振与共振时, (6) 之平稳解为

$$p(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = C \exp[-\lambda(\mathbf{H}')]|_{\mathbf{H}'=\mathbf{H}'(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \quad (11)$$

与

$$p(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = C \exp[-\lambda(\mathbf{I}', H_r, \boldsymbol{\psi}')] \quad (12)$$

式中 $\mathbf{I}' = \mathbf{I}'(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $H_r = H_r(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\boldsymbol{\psi}' = \boldsymbol{\psi}'(\mathbf{q}, \mathbf{p})$,
 $\boldsymbol{\psi}' = [\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots \ \psi_\beta]^T$, $\beta \leq r-2$ 。 H_r 为不可积部分之哈密顿量。(7) — (12) 中, 势函数的具体形式由 (6) 确定。

解 (7) 形同统计力学中气体运动的 Maxwell-Boltzmann 分布, 具有能量等分之性质, 即各自由度之间的能量比是固定的, 随机激励与阻尼只能控制系统

总能量的概率分布，因此称为能量等分解。而（8）—（12）为能量非等分解，随机激励与阻尼不仅可控制系统总能量的概率分布，还可调配各自由度之间的能量比。国际上，直至上世纪90年代初，所得到的精确平稳解皆属能量等分解，能量非等分解乃由我们首先得到。

法国Soize将陀螺力看成作用在系统上的外力，且未考虑到哈密顿系统的可积性，因此，他得出了陀螺力对系统的随机响应无影响的结论。我们将陀螺力

看成哈密顿系统的一部分并区分不可积与可积情形，得出结论：当包含陀螺力在内的哈密顿系统为不可积时，陀螺力确实不影响系统的随机响应；当该哈密顿系统为可积时，陀螺力影响响应的概率分布，但总能量的均值保持不变，从而纠正了Soize的不正确结论。

德国Ebeling给出的随机正则耗散系统

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - g(H) \frac{\partial H}{\partial p_i} + (2D(H))^{1/2} \xi(t)$$

的精确平稳解是(7)的特殊情形。

4、等效非线性系统法

当得不到上述形式的精确平稳解时，可应用等效非线性系统法。该法的基本思想是，对一给定无精确平稳解之系统，寻求一个具有精确平稳解同时其性态与给定系统性态在某种统计意义上很相近的等效系统，以该等效系统的精确平稳解作为给定系统的近似平稳解。

设给定系统的 $It\hat{o}$ 方程形为

$$dQ_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} dt \quad (13)$$

$$dP_i = - \left(\frac{\partial H}{\partial Q_i} + M_{ij}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \frac{\partial H}{\partial P_j} \right) dt + \sigma_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) dB_k(t)$$

与具有精确平稳解的系统 (5) 的哈密顿结构及随机激励相同，仅拟线性阻尼系数不同。等效非线性系统法的任务就是由给定 M_{ij} 求 m_{ij} ，使 (5) 具有精确平稳

解，同时使（5）与（13）之差在某种统计意义上为最小。为此，提出了三种等效准则：一是原系统与等效系统的阻尼力之差的均方值最小；二是两系统的阻尼力所消耗的能量之差均方值最小；三是两系统首次积分的平均时间变化率相等。

在实际执行等效非线性系统法时，可不必求 m_{ij} ，而直接求等效非线性系统法的精确平稳解。由于该解取决于相应哈密顿系统的可积性与共振性，因此，在应用该法之前，需先确定与给定系统（13）相应的哈密顿系统属于五种情形中的哪一种。这种方法的好处是可直接给

出解析形式的近似平稳解。例如，设与（13）相应的哈密顿系统为不可积，相应的等效系统精确平稳解形为（7）。根据上述第一种等效准则，可推出

$$\frac{\partial \lambda}{\partial H} = \frac{\int_{\Omega} \left[\left(m_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j} + 2 \frac{\partial b_{ij}}{\partial P_j} \right) \left(2b_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j} \right) / \frac{\partial H}{\partial P_1} \right] dQ_1 \cdots dQ_n dP_2 \cdots dP_n}{\int_{\Omega} \left[\left(2b_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j} \right) \left(2b_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j} \right) / \frac{\partial H}{\partial P_1} \right] dQ_1 \cdots dQ_n dP_2 \cdots dP_n} \quad (14)$$

$$\Omega = \{ (Q_1, \dots, Q_n; P_2, \dots, P_n) \mid H(Q_1, \dots, Q_n, 0, P_2, \dots, P_n) \leq H \}$$

在上述等效非线性系统法中，等效系统与原系统不仅具有相同的哈密顿结构（非线性刚

度) 与随机激励, 而且用一个等效非线性阻尼代替原非线性阻尼, 等效非线性系统保留了原系统的非线性特性。因此, 该法可应用于具有本质非线性特性的随机系统。这是等效非线性系统法与等效线性化的的本质差别。

对哈密顿系统五种情形, 都给出了高斯白噪声激励下耗散的哈密顿系统的等效非线性系统及其平稳解。通过与数字模拟解比较表明, 此法具有比较好的精度。

5、拟哈密顿系统随机平均法

设系统 (1) 在一个周期量级的时间内，随机激励输入系统的能量与阻尼消耗能量之差与系统本身总能量相比为小，(1) 就称为拟哈密顿系统。数学上，常设 a_{ij} 及 $\sigma_{ik}\sigma_{jk}$ 同为 ε 阶小量， ε 为一小参数，从而拟哈密顿系统运动方程形为

$$\begin{aligned}dQ_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i} dt \\dP_i &= -\left(\frac{\partial H}{\partial Q_i} + \varepsilon \bar{m}_{ij}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \frac{\partial H}{\partial P_j} \right) dt + \varepsilon^{1/2} \bar{\sigma}_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) dB_k(t)\end{aligned}\tag{15}$$

在拟哈密顿系统中，广义位移与动量为快变过程，而原哈密顿系统中的首次积分为慢变过程。按随机平均原理，慢变过程近似为扩散过程，可用平均方程或FPK方程描述，平均方程的维数与形式取决于相应哈密顿系统的可积性与共振性，也取决于随机激励的性质。

先设 (1) 中 $\xi_k(t)$ 为白噪声。在不可积情形，只有哈密顿量是一个慢变过程，因此，平均 $It\hat{o}$ 方程是一维的，

$$dH = m(H)dt + \sigma(H)dB(t) \quad (16)$$

式中 $B(t)$ 为单位 Wiener 过程，漂移系数 m 与扩散系数 σ 可按一定公式从原系统的系数求出^[9]。其平稳解为

$$p(H) = C \exp \left\{ - \int \left[\left(\frac{d\sigma^2(x)}{dx} - 2m(x) \right) / \sigma^2(x) \right] dx \right\} \quad (17)$$

原系统的平稳概率密度近似为^[9]

$$p(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{p(H)}{T(H)} \Big|_{H=H(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \quad (18)$$

当相应哈密顿系统为可积非共振时，原哈密顿系统的 n 个首次积分变成拟哈密顿系统中 n 个慢变过程，此时，平均 $It\hat{o}$ 方程是 n 维的，

$$dH_r = m_r(\mathbf{H})dt + \sigma_{rk}(\mathbf{H})dB_k(t) \quad (19)$$

式中 $B_k(t)$ 为独立单位Wiener过程， m_r 、 σ_{rk}

可按一定公式由原方程系数得到^[10]。与
(19) 相应的FPK方程，只含概率势流而
无概率环流，如有精确平稳解，则属平
稳势类，从而更易求得平稳解。(19)
之平稳解形为

$$p(\mathbf{H}) = C \exp \left[- \int_0^{\mathbf{H}} \frac{\partial \lambda}{\partial H_r} dH_r \right] \quad (20)$$

式中指数内为线积分， $\partial \lambda / \partial H_r$ 可从与(19)
相应的FPK方程求得，并需满足

协调条件 $\partial^2 \lambda / \partial H_r \partial H_s = \partial^2 \lambda / \partial H_s \partial H_r$ 。根据 H 与 q 、 p 关系还可由 (20) 得原系统近似平稳概率密度 $p(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 。

当相应哈密顿系统为可积而共振时，除了 n 个作用量 I_r 外， α 个成共振关系的角变量的组合 $\psi_\mu = k_i^\mu \theta_i$ 在拟哈密顿系统中也是慢变过程。因此，平均 $It\hat{o}$ 方程形为

$$\begin{aligned} dI_r &= m_r(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi})dt + \sigma_{rk}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi})dB_k(t) \\ d\psi_\mu &= m_\mu(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi})dt + \sigma_{\mu k}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi})dB_k(t) \end{aligned} \quad (21)$$

$$r = 1, 2, \dots, n; \quad \mu = 1, 2, \dots, \alpha; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

类似于可积非共振情况，（21）的平穩解形为

$$p(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}) = C \exp \left[- \left(\int_0^{\mathbf{I}} \frac{\partial \lambda}{\partial I_r} dI_r + \int_0^{\boldsymbol{\psi}} \frac{\partial \lambda}{\partial \psi_\mu} d\psi_\mu \right) \right] \quad (22)$$

$\partial \lambda / \partial I_r$ 、 $\partial \lambda / \partial \psi_\mu$ 可从与（21）相应的平穩FPK方程求得，也要满足相容条件。还可由（22）经变换得到原系统的近似平穩概率密度 $p(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 。

在部分可积非共振与部分可积共振情形，可分别按可积非共振与可积共振情形类似的方法得到平均方程与相应平稳解。

在白噪声激励情形，拟哈密顿随机平均方程的维数等于相应哈密顿系统独立、对合首次积分个数与（内）共振关系个数之和。显然，由拟哈密顿系统随机平均法给出的平稳解的形式与3中给出的精确平稳解是一致的。特别是，当原系数有精确平稳解时，随机平均法给出完全一样的平稳解。

当拟可积哈密顿系统受宽带随机激励时，也可得到类似于白噪声激励情形的平均 $It\hat{o}$ 方程，方程维数也一样，只是其系数的表达式不一样。若在随机激励中除白噪声与（或）宽带过程外，还含有谐和激励，那么，除了上述内共振外，还可能发生外共振或组合共振。此时，平均 $It\hat{o}$ 方程的维数就等于独立、对合首次积分数与内、外共振关系数之和。当随机激励含有窄带随机激励，例如有界

噪声时也有类似结论。

上述各种情形随机平均法之解皆已用数字模拟解证实，具有良好精度。鉴于随机平均方程比原方程简单、维数低、慢变过程为扩散过程，且与等效非线性系统法一样，能反映原系统的非线性特性，因此，可用平均方程代替原方程研究随机稳定性、分岔、首次穿越及最优控制。

例，采用PBD模型来描述DNA的热变性，DNA的运动方程为

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \gamma \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial U(\mathbf{y})}{\partial y_i} = \sqrt{2D} \xi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

其中 $U(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N M(y_i) + \sum_{i=2}^N V(y_i, y_{i-1}),$

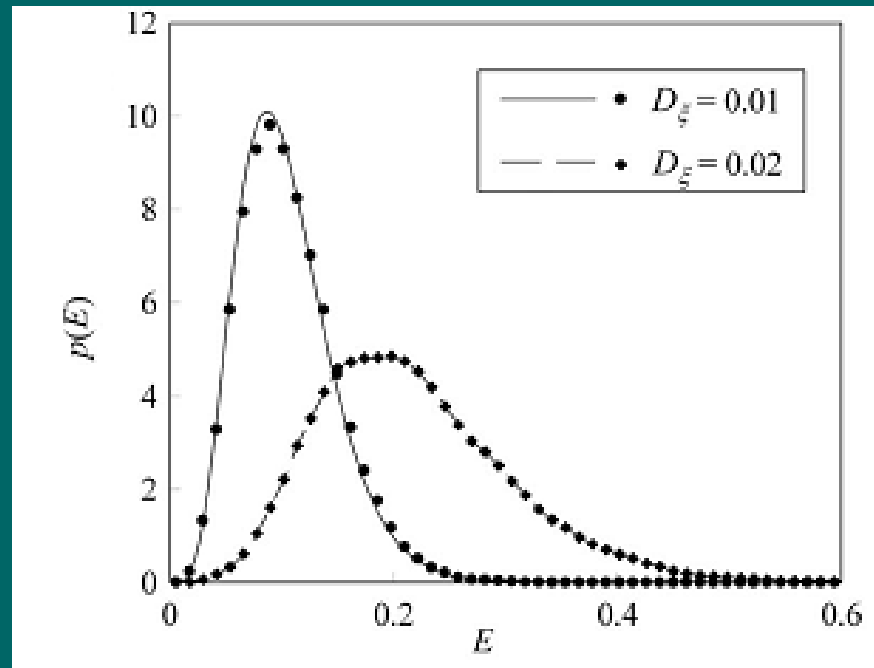
M 为Morse势能函数: $M(y_i) = E_0 (e^{-ay_i} - 1)^2$

V 为PBD势能函数: $V(y_i, y_{i-1}) = \frac{1}{2} K \{1 + \rho \exp[-\alpha(y_i + y_{i-1})]\} (y_i - y_{i-1})^2$

$\xi_i(t)$ 是独立互不相关的单位强度Gauss白噪声

根据涨落耗散定理，有 $D = \gamma k_B T$

应用拟不可积哈密顿系统随机平均法，得到：



碱基对平均能量的稳态概率密度

例，考虑在 Gauss 白噪声激励下非线性阻尼耦合的 van der Pol 振子与 Duffing 振子，其运动方程为

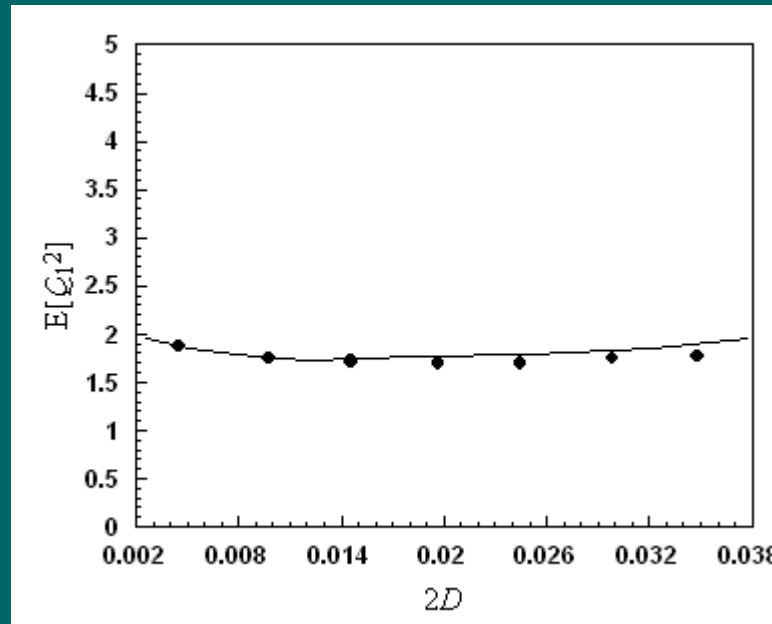
$$\dot{Q}_1 = P_1$$

$$\dot{P}_1 = -\omega^2 Q_1 - (-\beta_1 + \alpha_1 Q_1^2 + \alpha_2 Q_2^4 + \alpha_3 P_2^2) P_1 + \xi_1(t) + Q_1 \xi_3(t)$$

$$\dot{Q}_2 = P_2$$

$$\dot{P}_2 = -k Q_2^3 - (\beta_2 + \alpha_4 Q_1^2) P_2 + \xi_2(t) + Q_2 \xi_4(t)$$

运用可积哈密顿系统随机平均法



系统的平稳均方位移

例，考虑在Gauss白噪声激励下四自由度非线性系统

$$\dot{Q}_1 = P_1$$

$$\dot{P}_1 = -\omega_1^2 Q_1 - \left[\alpha_{10} + \alpha_{11} P_1^2 + \alpha_{12} P_2^2 + \alpha_{13} P_3^2 + \alpha_{14} P_4^2 + (\alpha_{13} + \alpha_{14}) U(Q_3, Q_4) \right] P_1 + \xi_1(t)$$

$$\dot{Q}_2 = P_2$$

$$\dot{P}_2 = -\omega_2^2 Q_2 - \left[\alpha_{20} + \alpha_{21} P_1^2 + \alpha_{22} P_2^2 + \alpha_{23} P_3^2 + \alpha_{24} P_4^2 + (\alpha_{23} + \alpha_{24}) U(Q_3, Q_4) \right] P_2 + \xi_2(t)$$

$$\dot{Q}_3 = P_3$$

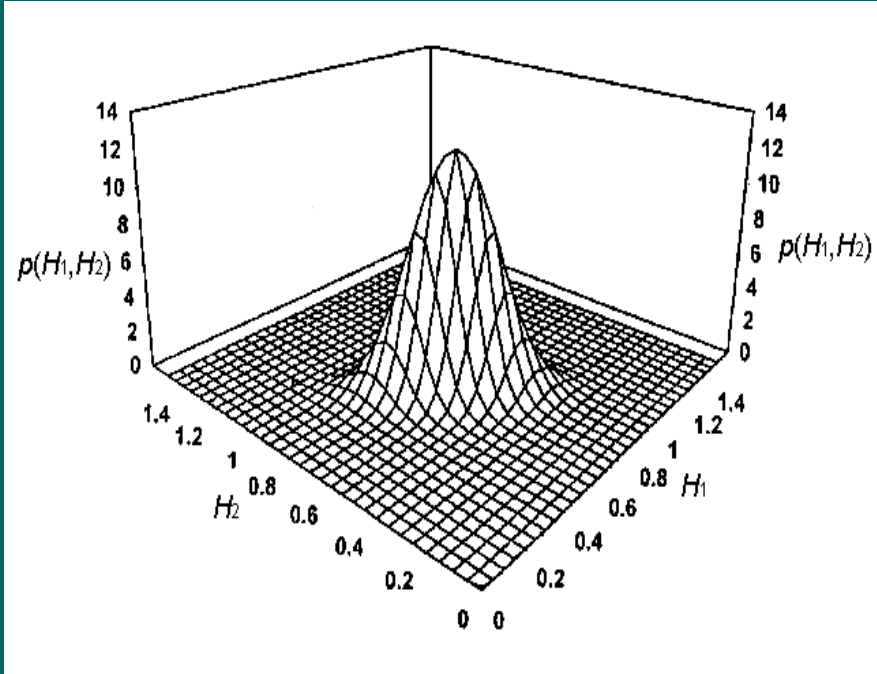
$$\dot{P}_3 = -\partial U / \partial Q_3 - \left[\alpha_{30} + \alpha_{31} P_1^2 + \alpha_{32} P_2^2 + \alpha_{33} P_3^2 + \alpha_{34} P_4^2 + (1/2)(\alpha_{34} + 3\alpha_{33}) U(Q_3, Q_4) \right] P_3 + \xi_3(t)$$

$$\dot{Q}_4 = P_4$$

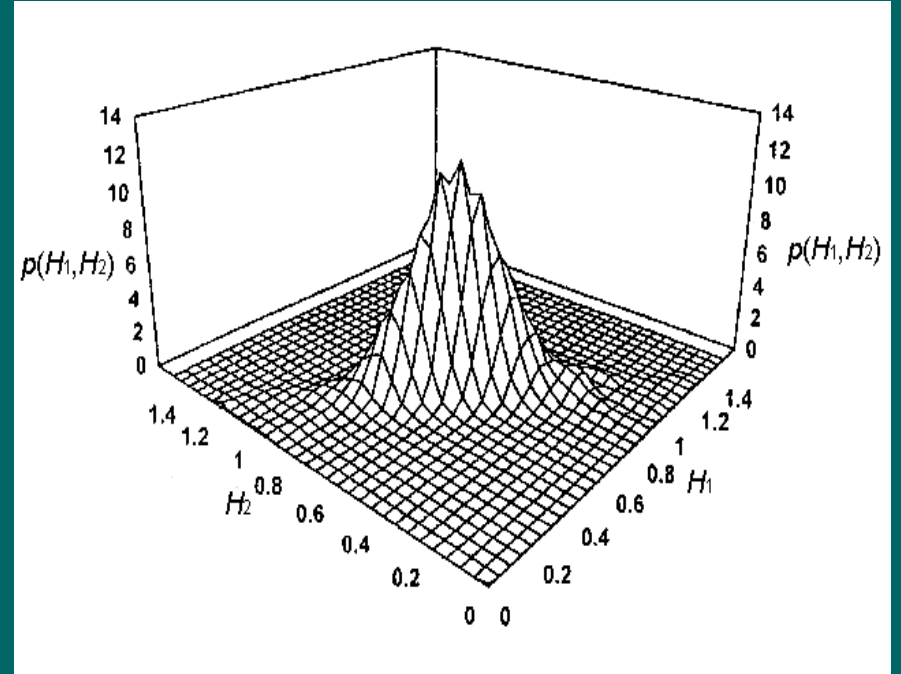
$$\dot{P}_4 = -\partial U / \partial Q_4 - \left[\alpha_{40} + \alpha_{41} P_1^2 + \alpha_{42} P_2^2 + \alpha_{43} P_3^2 + \alpha_{44} P_4^2 + (1/2)(\alpha_{43} + 3\alpha_{44}) U(Q_3, Q_4) \right] P_4 + \xi_4(t)$$

式中 $U(Q_3, Q_4) = (\omega_3^2 Q_3^2 + \omega_4^2 Q_4^2) / 2 + b(\omega_3^2 Q_3^2 + \omega_4^2 Q_4^2)^2 / 4$

运用拟部分可积哈密顿系统随机平均法



(a)



(b)

共振情形系统的首次积分的平稳概率密度：
 (a).随机平均法结果； (b)数值结果

6、随机稳定性与分岔

6.1 随机稳定性

对拟哈密顿系统 (15)，可通过求其平均 $It\hat{o}$ 方程的最大Lyapunov指数确定平凡解概率为1渐近稳定性。对拟不可积哈密顿系统，以 $H^{1/2}$ 作范数，求解得Lyapunov指数

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[m'(H) - \frac{1}{2} (\sigma'(H))^2 \right]_{H=0} \quad (23)$$

式中“'”表示导数。由 $\lambda < 0$ 得概率为1渐近稳定的充要条件。此外，由平均方程 $H(t)$ 在 $H=0$ 与 H 为有限值或无穷大处的边界的类别也可判定平凡解的概率为1渐近稳定性。一般，由Lyapunov指数 $\lambda < 0$ 得到的是局部稳定条件，而由两端边界类别得到的则是全局或大范围稳定性条件。

对非共振拟可积哈密顿系统，取平均 $It\hat{o}$ 方程 (19) 的线性化方程，设 $\bar{H} = \sum_{i=1}^n H_i$ 作变换

$$\rho = \ln \bar{H}^{1/2} = \frac{1}{2} \ln \bar{H}, \quad \alpha_r = H_r / \bar{H} \quad (24)$$

可用 $It\hat{o}$ 微分规则由 (19) 得到关于 ρ 、 α_i 的方程。最大Lyapunov指数表达式为

$$\lambda_1 = \int Q(\alpha') p(\alpha') d\alpha' \quad (25)$$

式中 $\alpha' = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_{n-1}]$, $Q(\alpha')$ 为 ρ 的漂移系数, $p(\alpha')$ 为 α' 的平稳概率密度, 通过求解与 α' 的 $It\hat{o}$ 方程相应的平稳FPK方程得到。

对共振拟可积哈密顿系统, 设 $\bar{I} = \sum_{i=1}^n I_i$
作变换

$$\rho = \frac{1}{2} \ln \bar{I}, \quad \alpha_r = I_r / \bar{I} \quad (26)$$

可从平均 $It\hat{o}$ 方程 (21) 导得如下最大 Lyapunov 指数表达式

$$\lambda_1 = \int Q(\alpha', \psi) p(\alpha', \psi) d\alpha' d\psi \quad (27)$$

对非共振与共振拟部分可积哈密顿系统，也可分别导出类似于（25）与（27）的最大Lyapunov指数表达式，从而得到概率为1渐近稳定的充要条件。

6.2 随机分岔

随机分岔理论研究动态系统族的定性性态随参数的变化而发生的变化。随机分岔分成两类：动态分岔即D-分岔与唯

象分岔即P-分岔。D-分岔研究动态系统的不变概率测度的稳定性随参数变化而发生的变化，用（最大）Lyapunov指数符号变化来判别。P-分岔乃研究平稳概率密度的峰的个数与形态随参数的变化而发生的变化，可通过对平稳概率密度作极值分析来判别。

对拟哈密顿系统，在平凡解处不变概率测度的D-分岔参数值，可令其平均 \hat{I}_t

方程的最大Lyapunov指数（23）、（25）、（27）等于零得到。而P-分岔参数数值可从对上述精确平稳概率密度，用等效非线性系统法，或用拟哈密顿随机平均法得到的近似平稳概率密度作极值分析得到。

对拟不可积哈密顿系统，由（18）对 p_i 、 q_i 求导并令导数为零，可知，峰值一般在 $dp/dH=0$ 的 H 值上。据此，由 $p(H)$ 在 $H=0$ 处的渐近表达式可得发生P-分岔的参数值^[15]。

7、首次穿域损坏

对拟哈密顿系统，平均后的慢变过程为扩散过程，因此，可用扩散过程模型确定首次穿域损坏的概率。对拟不可积哈密顿系统，平均哈密顿量为一维扩散过程，条件可靠性函数 $R(t|H_0)$ 满足一维后向 Kolmogorov 方程

$$\frac{\partial R}{\partial t} = m(H_0) \frac{\partial R}{\partial H_0} + \frac{1}{2} \sigma^2(H_0) \frac{\partial^2 R}{\partial H_0^2} \quad (28)$$

在适当边初值条件下求解式 (28) 可得可靠性函数，然后用

$$p(T | H_0) = - \left. \frac{\partial R(t | H_0)}{\partial t} \right|_{t=T} \quad (29)$$

$$T^n(H_0) = n \int_0^\infty T^{n-1} R(T | H_0) dT \quad (30)$$

得寿命条件概率密度与条件矩。

对其他情形的拟哈密顿系统，在平均方程基础上，易写出条件可靠性函数满足的后向Kolmogorov方程及相应初、边值条件。原则上可通过数值求解得首次

穿域损坏的概率或统计量。如前所述，不仅平均方程维数比原方程低，而且平均方程中不含概率环流项，因此，求解平均后的后向Kolmogorov方程要容易得多。此外，在宽带、宽带加谐和或窄带激励情况，原系统响应不是扩散过程，不能直接应用上述扩散过程理论方法。而经应用哈密顿系统随机平均法后慢变过程变成扩散过程，可应用上述扩散过程理论方法，这大大有助于多自由度非线性随机系统首次穿域损坏问题的解决。

8、小结

- 建立了一套非线性随机动力学的哈密顿理论体系。将该理论扩展到广义哈密顿系统，含有时滞、滞迟及分数型导数的系统；随机激励类型扩展到非高斯噪声等情形。
- 提供了一系列求解非线性随机动力学系统，尤其是多自由度强非线性系统的响应、稳定性、分叉以及可靠性的理论方法。

需进一步研究:

- 发展求解高维FPK方程、后向Komogolve方程的近似和数值方法
- 将该理论应用到生物、工程以及金融等领域

二、拟哈密顿系统的非线性随机 最优控制

- 1、引言
- 2、拟哈密顿系统的非线性随机最优控制
- 3、部分可观测系统的随机最优控制
- 4、最优有界控制
- 5、时滞控制系统的动力学、补偿及最优时滞控制
- 6、非线性随机最优控制的鲁棒性
- 7、不确定拟哈密顿系统的随机最优控制
- 8、小结

1、引言

✓ 工程结构的非线性随机振动需要进行控制。



高层建筑、大型桥梁、海洋平台等在强风、强震、海浪等作用下将产生强烈的非线性随机振动，需要进行控制

迄今已有70余座高层建筑、电视塔及桥梁等大型结构上安装了各类振动控制装置。



车辆在地面或轨道不平顺作用下、航天器在喷气噪声、大气紊流等作用下将产生强烈的非线性随机振动同样需要进行控制

- ✓ **结构控制研究现状。**上世纪60年代以来，结构振动的主动与半主动控制进行了许多研究^{1,2}，然而，这些研究基本上采用线性反馈控制策略，而且往往不考虑振源的随机性
- ✓ **研究随机最优控制的方法。**上世纪60年代以来，数学界在随机最优控制的基本理论方面进行了许多研究，发展了随机动态规划原理与随机极大值原理，证明了解的的存在唯一性，等等，但主要应用于金融、经济及管理等领域

1. Soong TT. *Active Structural Control: Theory and Practice*, New York: Longman Scientific & Technical, 1990.
2. 欧进萍。结构振动控制—主动、半主动和智能控制，北京：科学出版社，2003。

基本思想



2. 拟哈密顿系统的非线性随机最优控制

2.1 响应最小化

我们已经研究了三类随机最优控制问题：响应最小化控制，反馈稳定化及首次穿越损坏的反馈最小化。

响应最小化控制的目的是设计一个反馈控制策略使系统响应达到最小。

考虑完全可观测拟不可积哈密顿系统的随机最优控制问题.

控制系统方程为

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H}{\partial Q_i} - c_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j} + f_{ik} \xi_k(t) + u_i\end{aligned}\quad (1)$$

性能指标为

$$J = E\left[\int_0^{t_f} L(\mathbf{Q}(\tau), \mathbf{P}(\tau), \mathbf{u}(\tau))d\tau + \Psi(\mathbf{Q}(t_f), \mathbf{P}(t_f))\right]\quad (2)$$

部分平均的受控系统为

$$dH = [m(H) + \langle \frac{\partial H}{\partial P_i} u_i \rangle] dt + \sigma(H) dB(t) \quad (3)$$

部分平均的性能指标为

$$J' = E\left[\int_0^{t_f} L(H(\tau), \langle \mathbf{u}(\tau) \rangle) d\tau + \Psi(H(t_f))\right] \quad (4)$$

根据随机动态规划原理，得到如下动态规划方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} = & -\min_{\mathbf{u}} \left\{ L(H, \langle \mathbf{u} \rangle) + [m(H) + \langle u_i \frac{\partial H}{\partial P_i} \rangle] \frac{\partial V}{\partial H} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sigma^2(H) \frac{\partial^2 V}{\partial H^2} \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

如果 $L(H, \langle \mathbf{u} \rangle) = g(H) + \langle \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} \rangle$, 则最优控制力为

$$u_i^* = -\frac{1}{2} R_{ij}^{-1} \frac{\partial V}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial P_j} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

将 u_i^* 代入(5)式得到最终动态规划方程, 解此方程得到最优控制力。将得到的最优控制力 \mathbf{u}^* 代入(3)式, 完成平均并求解与完全平均Itô方程相对应的FPK方程, 得到最优控制系统的响应的统计量。

对于半无限长时间区间上的控制问题, 性能指标为

$$J_1 = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} L(\mathbf{Q}(\tau), \mathbf{P}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad (7)$$

此称为遍历控制, 可类似得到其最优控制力和相应的响应统计量。

如果控制力为有界，即 $|u_i| \leq b_i$ ，那么性能指标与 \mathbf{u} 无关

$$J_2 = E\left[\int_0^{t_f} L_2(\mathbf{Q}(\tau), \mathbf{P}(\tau))d\tau + \Psi_2(\mathbf{Q}(t_f), \mathbf{P}(t_f))\right] \quad (8)$$

则最优控制为bang-bang控制，此时不必求解动态规划方程就可确定最优控制力。然后可以得到相应的响应统计量。

衡量一个控制策略可以用以下两种准则：控制效果 K 和控制效率 μ

$$K = \frac{RMS(\text{response}_U) - RMS(\text{response}_C)}{RMS(\text{response}_U)} \quad (9)$$

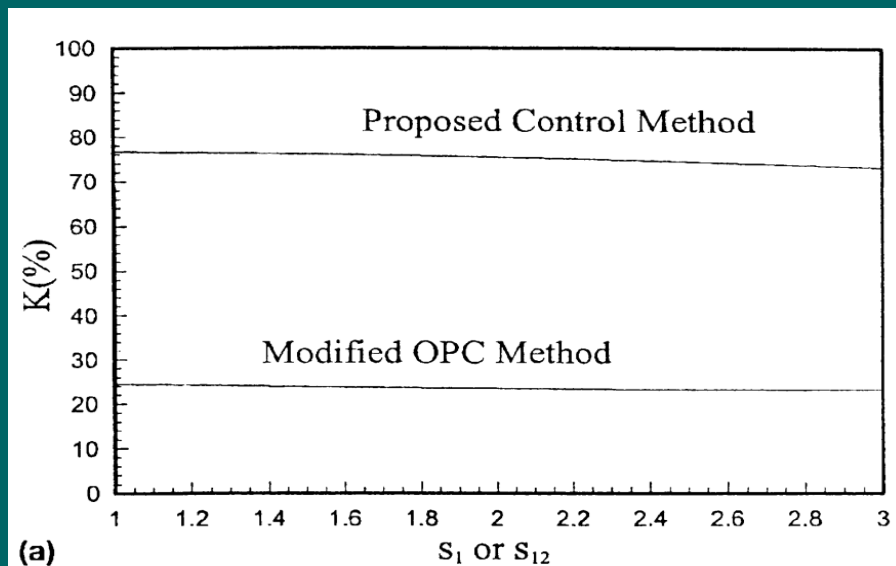
$$\mu = \frac{K}{RMS(\text{normalized control force})} \quad (10)$$

例：水平与垂直地面运动激励的滞迟柱的非线性随机最优控制

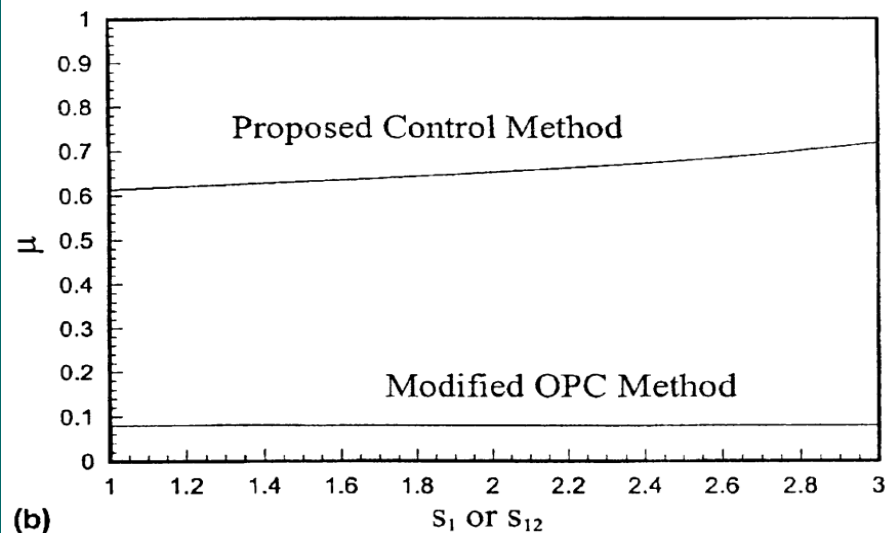
受控系统方程为

$$\dot{Q} = P$$

$$\dot{P} = -(a - k_1)Q - (1 - \alpha)Z - 2\zeta P + u + \xi_1(t) + k_2 Q \xi_2(t)$$



(a)



(b)

2.2 反馈稳定化

目前研究随机参激系统的稳定性问题一般用最大Lyapunov指数.

反馈稳定化控制的目的是设计一种控制策略使得最大Lyapunov指数最小，并且为负.

考虑如下拟不可积哈密顿系统的遍历控制问题.

受控系统的运动方程

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H}{\partial Q_i} - c_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j} + f_{ik} \xi_k(t) + u_i\end{aligned}\tag{11}$$

性能指标

$$J_1 = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} L(\mathbf{Q}(\tau), \mathbf{P}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau\tag{12}$$

式中 L 将由最大Lyapunov指数为最小确定.

部分平均的系统运动方程为

$$dH = [m(H) + \langle \frac{\partial H}{\partial P_i} u_i \rangle] dt + \sigma(H) dB(t) \quad (13)$$

部分平均的性能指标为

$$J'_1 = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} L(H(\tau), \langle \mathbf{u}(\tau) \rangle) d\tau \quad (14)$$

最大 Lyapunov 指数

$$\lambda_1^c = \frac{1}{2} \bar{m}'(0) - \frac{1}{4} [\sigma'(0)]^2 \quad (15)$$

$$\bar{m}(H) = \bar{m}(H) + \langle \frac{\partial H}{\partial P_i} u_i^* \rangle \quad (16)$$

最优控制系统与未控系统的最大Lyapunov指数差为

$$\lambda_1^c - \lambda_1^u = \frac{d}{dH} \left\langle \frac{\partial H}{\partial P_i} u_i^* \right\rangle \Big|_{H=0} \quad (17)$$

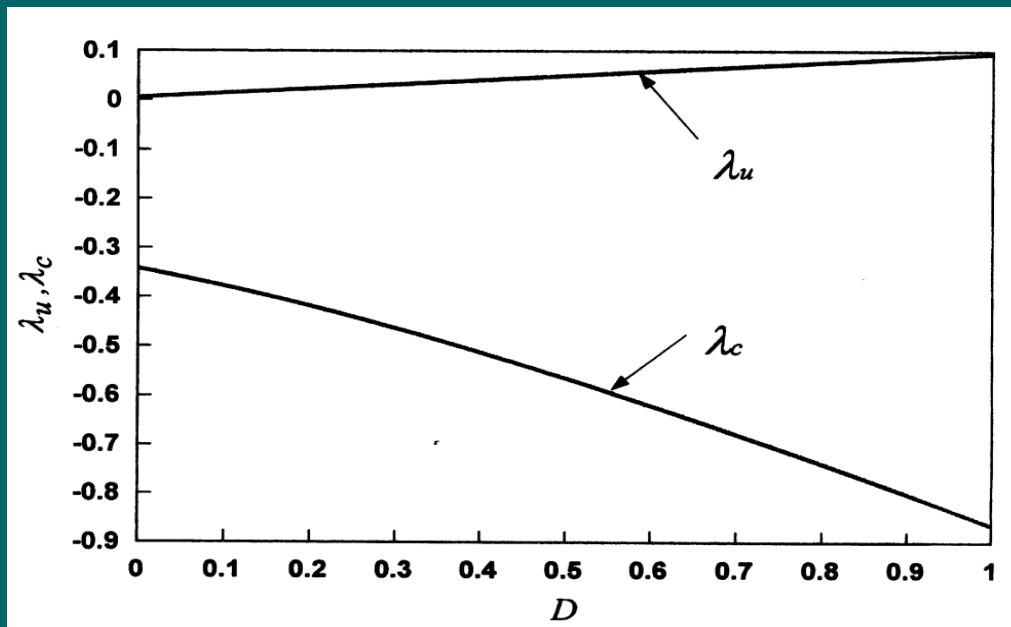
选择函数 L 和最优控制力 \mathbf{u}^* 使得 λ_1^c 最小。

例:考虑Gauss白噪声参激下非线性耦合的两个van der pol 振子的稳定性.

系统运动方程

$$\ddot{X} - (\alpha_1 - \beta_1 X^2)\dot{X} + \omega_1^2 X + aY + b|X - Y|^\delta \text{sign}(X - Y) = u_1 + c_1 X \xi_1(t) + c_3 \dot{X} \xi_3(t)$$

$$\ddot{Y} - (\alpha_2 - \beta_2 Y^2)\dot{Y} + \omega_2^2 Y + aX + b|X - Y|^\delta \text{sign}(X - Y) = u_2 + c_2 X \xi_2(t) + c_4 \dot{Y} \xi_4(t)$$



2.3 首次穿越损坏的反馈最小化

首次穿越损坏反馈最小化控制的目的是设计一种控制策略使得可靠性函数或平均首次穿越时间达到最大。

考虑拟不可积哈密顿系统的可靠性函数最大化控制问题

系统方程为

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad (18)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} - c_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j} + f_{ik} \xi_k(t) + u_i$$

性能指标

$$J_3 = P\{(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq t_f\} \quad (19)$$

部分平均的系统方程

$$dH = [m(H) + \langle \frac{\partial H}{\partial P_i} u_i \rangle] dt + \sigma(H) dB(t) \quad (20)$$

部分平均的性能指标

$$J'_3 = P\{H < H_c, 0 \leq t \leq t_f\} \quad (21)$$

根据随机动态规划原理，得到如下动态规划方程

$$\begin{aligned} \max_u \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + [m(H) + \langle u_i \frac{\partial H}{\partial P_i} \rangle] \frac{\partial}{\partial H} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sigma^2(H) \frac{\partial^2}{\partial H^2} \right\} V(t, H) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

假设控制力为有界 $|u_i| \leq b_i$, 则最优Bang-bang控制力为

$$u_i^* = -b_i \operatorname{sgn}(\dot{Q}_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

将 \mathbf{u}^* 代入前面的动态规划方程并求解该方程得到最优控制系统的可靠性函数.

平均首次穿越时间为目标的随机控制问题的性能指标为

$$J_4 = E[\tau(H, \mathbf{u})] \quad (24)$$

同样可以得到最优控制力和相应的平均首次穿越时间.

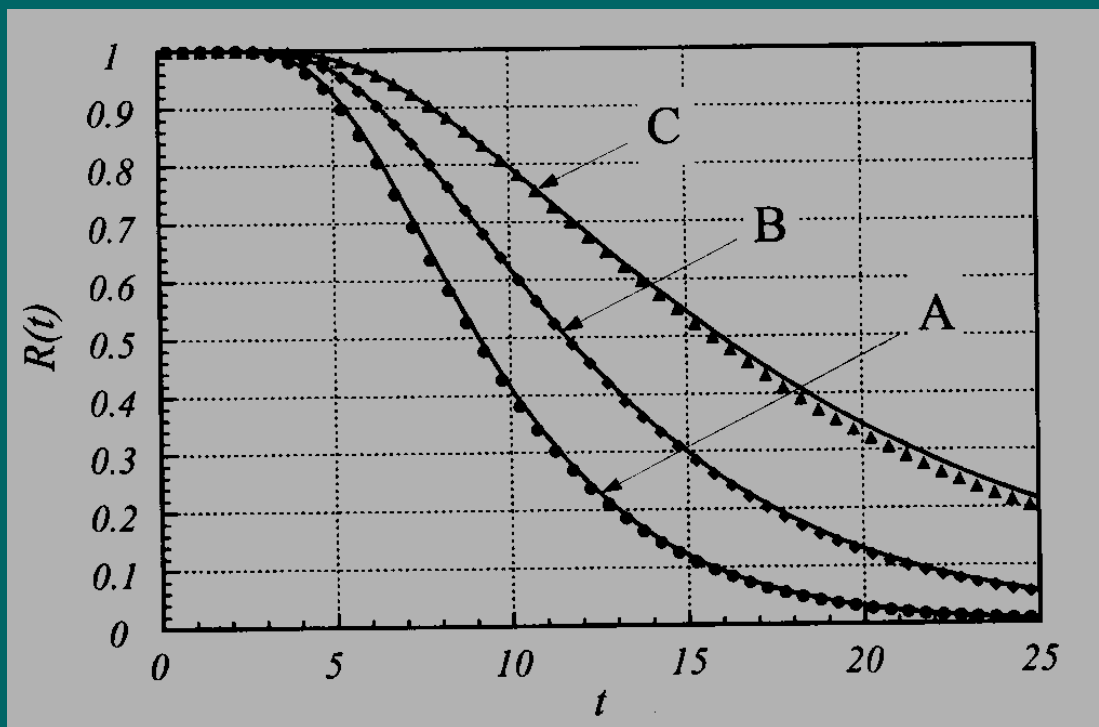
例: 3自由度拟部分可积哈密顿系统的可靠性函数

$$\ddot{X}_1 + \dot{X}_1(\alpha_{10} + \alpha_{11}\dot{X}_1^2 + \alpha_{12}\dot{X}_2^2 + \alpha_{13}\dot{X}_3^2) + \omega_1^2 X_1 = W_1(t) + X_1 W_4(t) + u_1$$

$$\ddot{X}_2 + \dot{X}_2(\alpha_{20} + \alpha_{21}\dot{X}_1^2 + \alpha_{22}\dot{X}_2^2 + \alpha_{23}\dot{X}_3^2) + \frac{\partial U}{\partial X_2} = W_2(t) + X_2 W_5(t) + u_2$$

$$\ddot{X}_3 + \dot{X}_3(\alpha_{30} + \alpha_{31}\dot{X}_1^2 + \alpha_{32}\dot{X}_2^2 + \alpha_{33}\dot{X}_3^2) + \frac{\partial U}{\partial X_3} = W_3(t) + X_3 W_6(t) + u_3$$

$$U(X_2, X_3) = \frac{1}{2}(\omega_2^2 X_2^2 + \omega_3^2 X_3^2) + \frac{b}{4}(\omega_2^2 X_2^2 + \omega_3^2 X_3^2)^2$$



3. 部分可观测系统的最优控制

3.1 线性系统与线性观测方程

- ✓ 实际应用中，系统的状态往往是通过带有噪声的非直接测量经滤波估计得到的，因此系统状态是部分可观测的。
- ✓ 部分可观测最优控制包括滤波与最优控制。
- ✓ 对线性系统与线性观测方程，可应用分离原理将部分观测系统的最优控制问题转化为完全可观测系统的最优控制问题来求解。

3.2 非线性受控系统与（或）观测方程

- ✓ 对非线性受控系统与（或）观测方程，转化后的完全可观测系统一般是无限维的，难以求解。
- ✓ 根据Charalambous与Elliott的定理，将非线性部分可观测系统的随机最优控制问题转化为有限维的线性的完全可观测的随机最优控制问题的最优控制策略。

考虑部分可观测非线性系统的最优控制问题

受控系统方程

$$d\mathbf{X} = [\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{G}(\mathbf{X})]dt + \mathbf{u}dt + \mathbf{C}_1 d\mathbf{B}(t) \quad (25)$$

性能指标

$$J = E\left[\int_0^{t_f} L(\mathbf{X}, \mathbf{u})d\tau + \Psi(\mathbf{X}(t_f))\right] \quad (26)$$

观测方程

$$d\mathbf{Y} = [\mathbf{D}\mathbf{X} + \mathbf{E}(\mathbf{X})]dt + \mathbf{F}u dt + \mathbf{C}_2 d\mathbf{B}(t) + \mathbf{C}_3 d\mathbf{B}_1(t) \quad (27)$$

将控制力 \mathbf{u} 分成 \mathbf{u}_1 和 \mathbf{u}_2 两部分，选择 \mathbf{u}_1 满足一定的条件。然后根据Charalambous and Elliott的原理，将部分观测非线性系统的最优控制问题转化为完全可观测线性系统的最优控制问题。

转化后的系统方程为

$$\begin{aligned}d\hat{\mathbf{X}} &= (\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}_2)dt + (\mathbf{R}_c\mathbf{D}^T + \mathbf{C}_1\mathbf{C}_2^T)\mathbf{C}^{-1}d\mathbf{V}_1 \\ \hat{\mathbf{X}} &= \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}} \\ d\mathbf{V}_1 &= d\mathbf{Y} - \mathbf{D}\hat{\mathbf{X}}dt\end{aligned}\tag{28}$$

相应的性能指标为

$$J = E\left\{\int_0^{t_f} L(\hat{\mathbf{X}}(\tau), \mathbf{u}_2(\tau))dt + \Psi(\mathbf{X}(t_f))\right\}\tag{29}$$

应用上述完全可观测系统的最优控制策略得到最优控制力为

$$\mathbf{u}_2^* = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \frac{\partial V}{\partial \hat{\mathbf{H}}} \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}}{\partial \dot{\hat{\mathbf{X}}}} \quad (30)$$

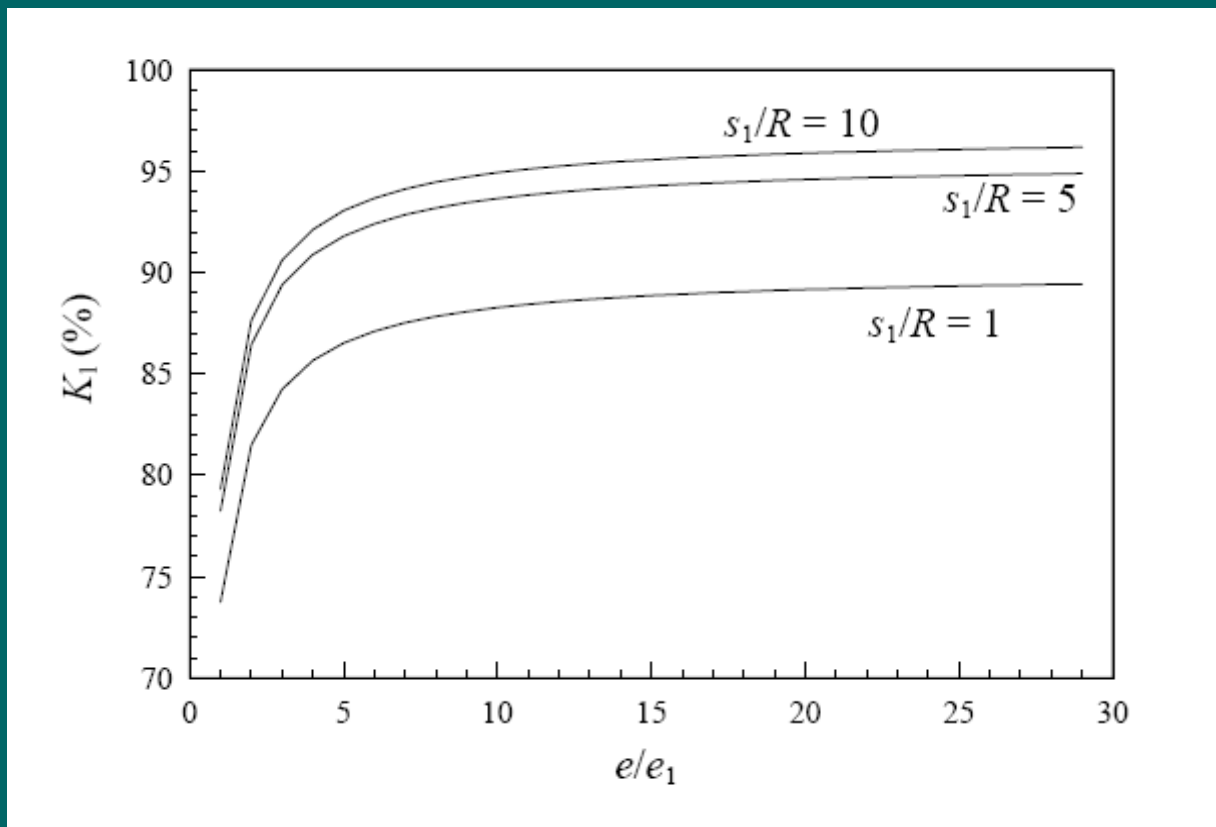
总的最优控制力为 $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2^*$

例：高斯白噪声激励下的Duffing振子的遍历控制

系统方程为

$$\ddot{X}_1 + c\dot{X}_1 + aX_1 + bX_1^3 = e\xi(t) + u$$

观测方程为 $\dot{Y} = \dot{X} + e_1\xi_1(t)$



4. 最优有界控制

4.1 Bang-bang控制

- ✓ 实际应用中，由于执行器饱和，使得控制力必为有界。
- ✓ 处理饱和问题的一种方法是bang-bang控制，其最优控制力形为

$$u_i^* = -b \operatorname{sgn}(\dot{Q}_i), i = 1, 2, \dots, n$$

- ✓ 然而Bang-Bang控制策略具有控制效率较低和产生颤振等缺点。

4.2 最优无界控制与bang-bang控制结合

为了改进bang-bang控制策略，我们提出与发展了计及执行器饱和的拟Hamilton系统的非线性随机最优控制策略。

考虑如下受控拟哈密顿系统:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} - c_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j} + f_{ik} W_k(t) + u_i \quad (31)$$

$$|u_i| \leq b_{ui}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

部分平均的系统方程

$$dH_r = [m_r(\mathbf{H}) + \langle \frac{\partial H_r}{\partial P_i} u_i \rangle] dt + \sigma_{rk}(\mathbf{H}) dB_k(t)$$
$$r, i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (32)$$

对有限时间区间的控制，部分平均的性能指标为

$$J_1 = E[\int_0^{t_f} L(\mathbf{H}(t), \langle \mathbf{u}(t) \rangle) dt + \Psi(\mathbf{H}(t_f))] \quad (33)$$

对半无限长遍历控制，部分平均的性能指标为

$$J_2 = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} L(\mathbf{H}(t), \langle \mathbf{u}(t) \rangle) dt \quad (34)$$

建立如下动态规划方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} = & - \min_{\mathbf{u} \in U} \{ L(\mathbf{H}, \langle \mathbf{u} \rangle) + [m_r(\mathbf{H}) + \langle u_i \frac{\partial H_r}{\partial P_i} \rangle] \frac{\partial V}{\partial H_r} \\ & + \frac{1}{2} \sigma_{rk}(\mathbf{H}) \sigma_{sk}(\mathbf{H}) \frac{\partial^2 V}{\partial H_r \partial H_s} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \lambda = & - \min_{\mathbf{u} \in U} \{ L(\mathbf{H}, \langle \mathbf{u} \rangle) + [m_r(\mathbf{H}) + \langle u_i \frac{\partial H_r}{\partial P_i} \rangle] \frac{\partial V}{\partial H_r} \\ & + \frac{1}{2} \sigma_{rk}(\mathbf{H}) \sigma_{sk}(\mathbf{H}) \frac{\partial^2 V}{\partial H_r \partial H_s} \end{aligned} \quad (36)$$

对计及执行器饱和问题，控制约束形为

$$U: |u_i| \leq b_i, \quad b_i > 0, \quad i=1,2,\dots,n \quad (37)$$

最优饱和控制力为

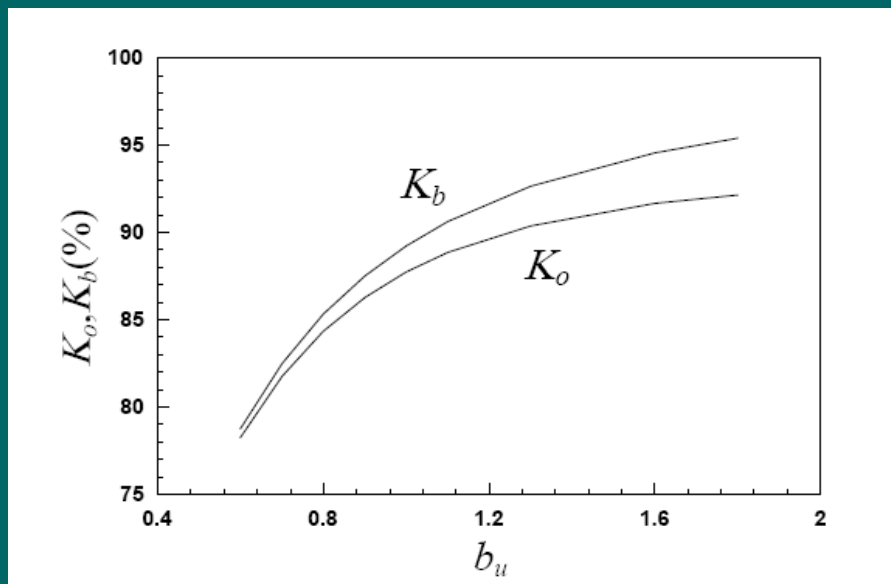
$$u_i^* = \begin{cases} -F_i, & |F_i| < b_{ui} \\ -b_{ui} \operatorname{sgn}(F_i), & |F_i| \geq b_{ui} \end{cases}, \quad (38)$$

$$F_i = \frac{1}{2} R_{ij}^{-1} \frac{\partial H_r}{\partial P_j} \frac{\partial V}{\partial H_r}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

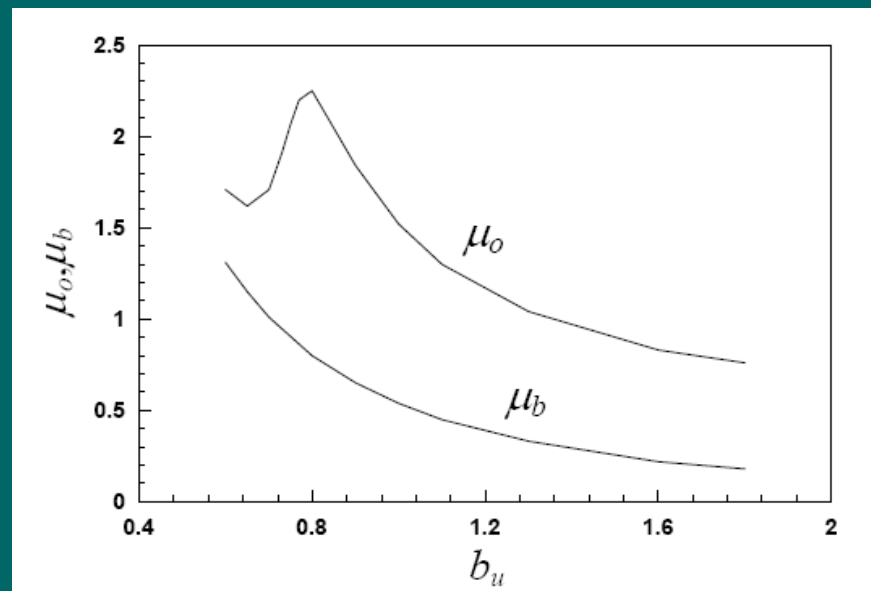
例：随机激励下的单自由度Duffing振子

受控系统的方程为

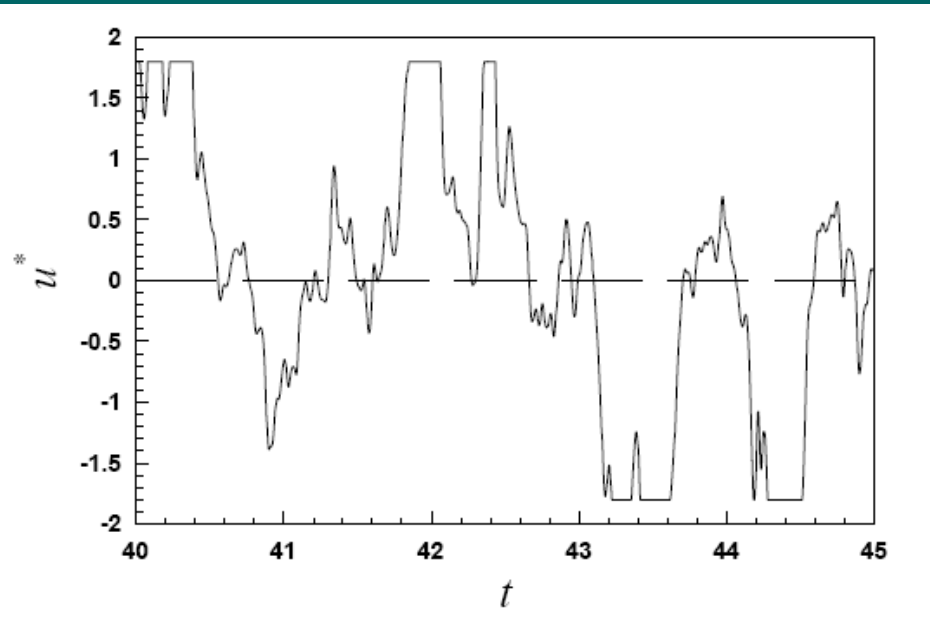
$$\ddot{X} + c\dot{X} + aX + bX^3 = W(t) + u$$



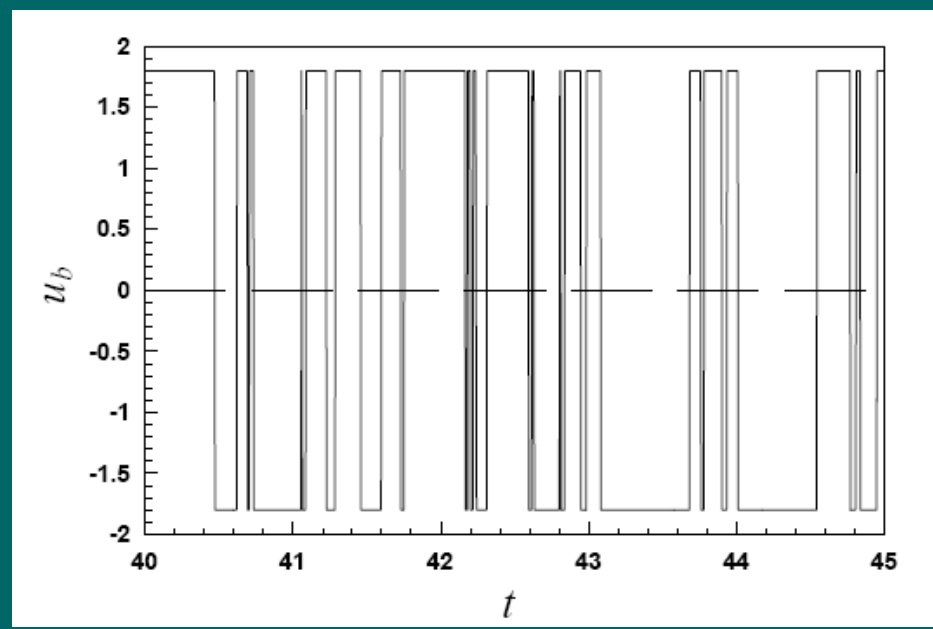
控制效果



控制效率



饱和控制力



Bang-bang 控制力

5. 时滞控制系统的动力学、补偿及最优时滞控制

- ✓ 由于系统的测量与滤波，控制力的计算与执行均需一定的时间，因而时滞是不可避免的。
- ✓ 具有时滞状态反馈的控制力，多数情况下会降低系统的控制效果和控制效率，增加控制成本，甚至可能引起系统的失稳。
- ✓ 我们运用随机平均法研究了具有时滞控制的拟可积哈密顿系统的稳定性与响应及其补偿。

5.1 具有时滞控制的拟可积哈密顿系统的动力学

考虑如下n自由度具有时滞控制的拟可积哈密顿系统

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} - \varepsilon c_{ij} \frac{\partial H'}{\partial P_j} - \varepsilon F_i(\mathbf{Q}_\tau, \mathbf{P}_\tau) + \varepsilon^{1/2} f_{ik} W_k(t)\end{aligned}\quad (39)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

假设相应的哈密顿系统具有一族绕原点的周期解，解的形式可以写成

$$\begin{aligned}Q_i(t) &= A_i \cos \Phi_i(t) \\ P_i(t) &= -A_i \frac{d\Theta_i}{dt} \sin \Phi_i(t) \\ \Phi_i(t) &= \Theta_i(t) + \Gamma_i(t)\end{aligned}\quad (40)$$

对小的时滞时间 τ ，有如下近似式

$$\begin{aligned}
 Q_i(t - \tau) &= A_i(t - \tau) \cos \Phi_i(t - \tau) \\
 &\doteq A_i(t) \cos[\omega_i(t - \tau) + \Gamma_i(t)] \\
 &= A_i(t) \{ \cos[\omega_i t + \Gamma_i(t)] \cos \omega_i \tau + \sin[\omega_i t + \Gamma_i(t)] \sin \omega_i \tau \} \\
 &= Q_i(t) \cos \omega_i \tau - \frac{P_i}{\omega_i} \sin \omega_i \tau \\
 P_i(t - \tau) &= -A_i(t - \tau) \frac{d\Theta_i(t - \tau)}{dt} \sin \Phi_i(t - \tau) \\
 &\doteq -A_i(t) \omega_i \sin[\omega_i(t - \tau) + \Gamma_i(t)] \\
 &= -A_i(t) \omega_i \{ \sin[\omega_i t + \Gamma_i(t)] \cos \omega_i \tau + \cos[\omega_i t + \Gamma_i(t)] \sin \omega_i \tau \} \\
 &= P_i \cos \omega_i \tau + Q_i(t) \omega_i \sin \omega_i \tau
 \end{aligned} \tag{41}$$

具有时滞的控制力可以表示为非时滞的形式，从而得到非时滞的拟可积哈密顿系统的Itô随机微分方程

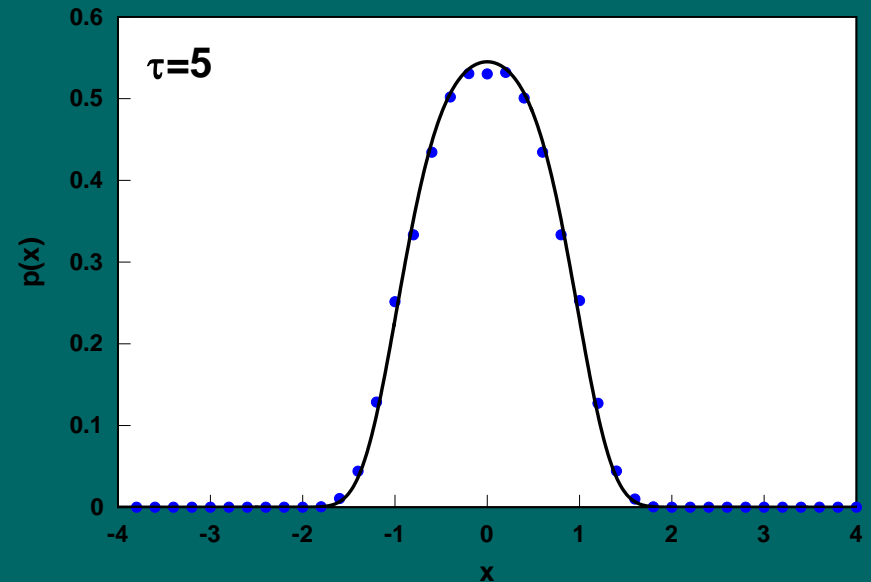
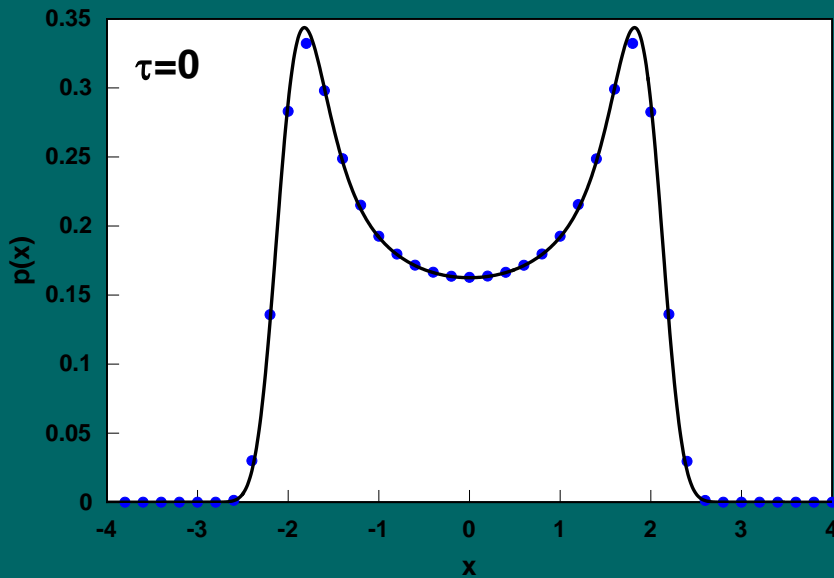
$$\begin{aligned}dQ_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i} dt \\dP_i &= -\left(\frac{\partial H}{\partial Q_i} + \varepsilon m_{ij} \frac{\partial H}{\partial P_j}\right)dt + \varepsilon^{1/2} f_{ik} dB_k(t) \\i, j &= 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}\tag{42}$$

运用拟可积哈密顿系统的随机平均法，可以得到时滞对受控系统响应的影响。

例：高斯白噪声激励下的具有时滞线性反馈控制的单自由度van der Pol振子

运动方程为

$$\ddot{X} + \omega'^2 X = \varepsilon(1 - X^2)\dot{X} - \varepsilon(a_1 X_\tau + a_2 \dot{X}_\tau) + \varepsilon^{1/2}W(t)$$

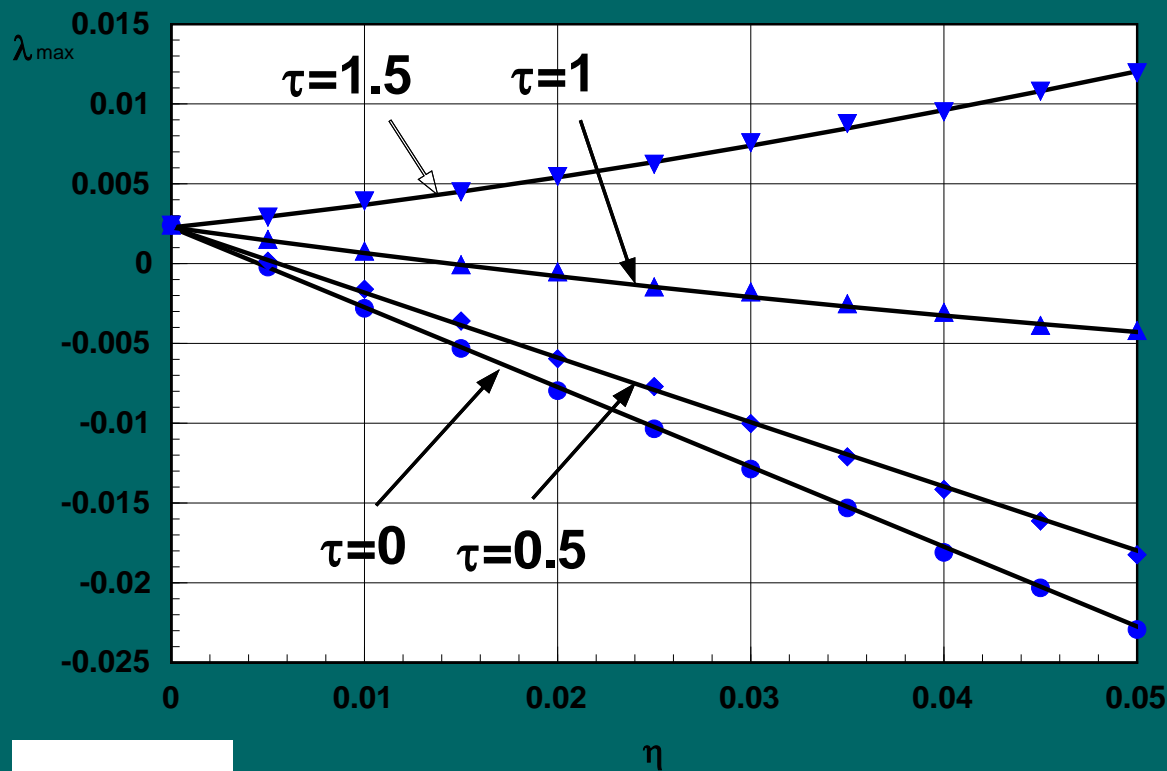


对系统响应的影响

例:两个线性振子通过非线性阻尼与随机激励相耦合，并具有时滞反馈控制

$$\ddot{X}_1 + \alpha'_{11}\dot{X}_1 + \alpha'_{12}\dot{X}_2 + \beta_1\dot{X}_1(X_1^2 + X_2^2) + \omega_1'^2 X_1 = -\eta_1\dot{X}_{1\tau} + k_{11}X_1W_1(t) + k_{12}X_2W_2(t)$$

$$\ddot{X}_2 + \alpha'_{21}\dot{X}_1 + \alpha'_{22}\dot{X}_2 + \beta_2\dot{X}_2(X_1^2 + X_2^2) + \omega_2'^2 X_2 = -\eta_2\dot{X}_{2\tau} + k_{21}X_1W_1(t) + k_{22}X_2W_2(t)$$



最大 Lyapunov 指数

5.2 具有时滞控制的拟可积哈密顿系统的补偿

具有时滞反馈bang-bang控制的n自由度拟可积哈密顿系统

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} - \varepsilon c_{ij} \frac{\partial H'}{\partial P_j} + \varepsilon u_i(P_{i\tau}) + \varepsilon^{1/2} f_{ik} W_k(t) \\ i, j &= 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}\tag{43}$$

时滞的bang-bang控制力 $u_i(P_{i\tau})$ 可近似表示成无时滞控制力

$$u_i(P_{i\tau}) = u_i(P_i(t - \tau)) = u_i(P_i(t)) \cos \omega_i \tau = -b_i \cos \omega_i \tau \operatorname{sgn}(P_i(t))\tag{44}$$

时滞反馈控制的补偿方法

(1) 改变控制力幅值法:

假设补偿后的时滞控制力与无时滞的理想控制力相等

$$g_i u_i(P_{i\tau}) = u_i(P_i) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (45)$$

求得补偿后的控制力幅值为

$$b_{ci} = g_i b_i = b_i / \cos \omega_i \tau \quad (46)$$

即改变bang-bang控制力的幅值，可以对时滞控制进行补偿，提高具有时滞控制力的控制效果

(2)、改变时滞时间法:

可以主动增加时滞时间，来达到提高控制效果的目的

现仍假设补偿后的时滞控制力与无时滞的控制力相等，补偿后bang-bang控制力的大小不变，即 $|g_i|=1$ ，而时滞的时间为变量 τ_{ci} ，有 $\cos \omega_i \tau_{ci} = 1/g_i = \pm 1$

控制后的时滞时间

$$\begin{cases} \tau_{ci} = (2n+1)\pi / \omega_i, & g_i = -1, & \tau \in (2n\pi / \omega_i, (2n+1)\pi / \omega_i], \\ \tau_{ci} = (2n+2)\pi / \omega_i, & g_i = 1, & \tau \in ((2n+1)\pi / \omega_i, (2n+2)\pi / \omega_i], \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (47)$$

本方法不增加控制的成本，即不改变控制力幅值大小，就可达到很好的控制效果。

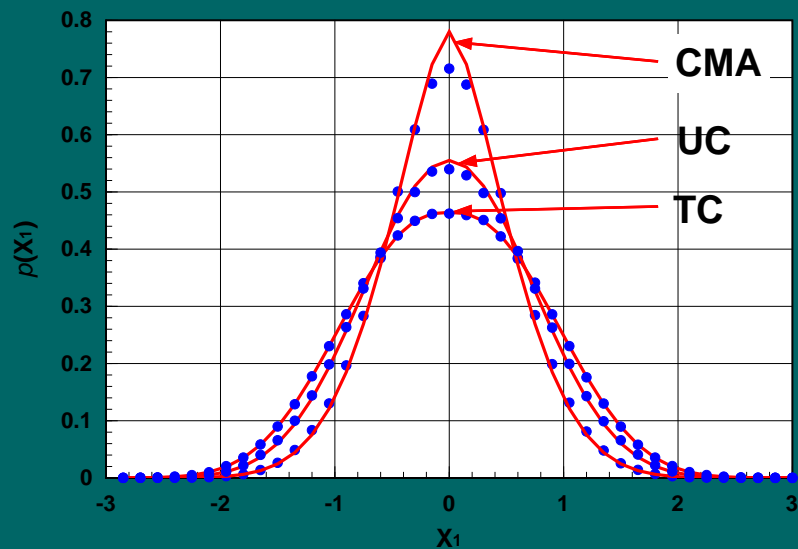
例、两个线性振子通过线性与非线性阻尼相耦合，受互不相关的高斯白噪声激励，且受时滞反馈bang-bang控制

$$\ddot{X}_1 + \alpha_{11}\dot{X}_1 + \alpha_{12}\dot{X}_2 + \beta_1\dot{X}_1(X_1^2 + X_2^2) + \omega_1^2 X_1 = u_{1\tau} + W_1(t)$$

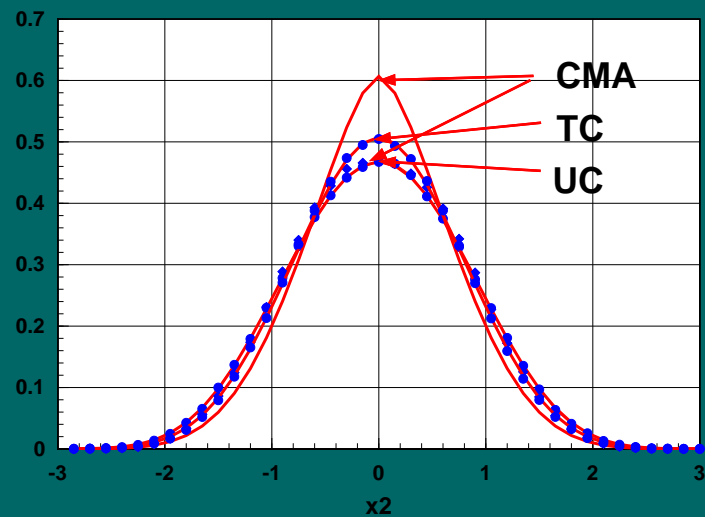
$$\ddot{X}_2 + \alpha_{21}\dot{X}_1 + \alpha_{22}\dot{X}_2 + \beta_2\dot{X}_2(X_1^2 + X_2^2) + \omega_2^2 X_2 = u_{2\tau} + W_2(t)$$

具有时滞的bang-bang反馈控制可近似为

$$u_{i\tau} = -b_i \cos \omega_i \tau \operatorname{sgn}(P_i), \quad i = 1, 2.$$



(a) X_1 的概率分布

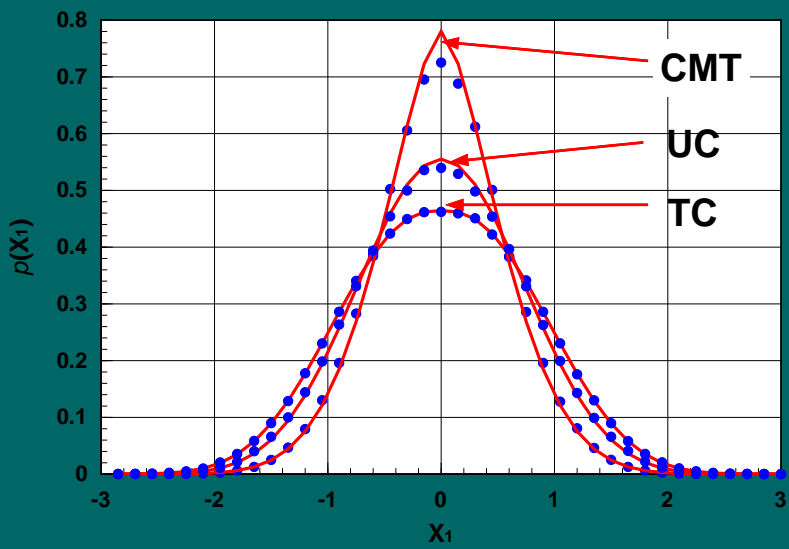


(b) X_2 的概率分布

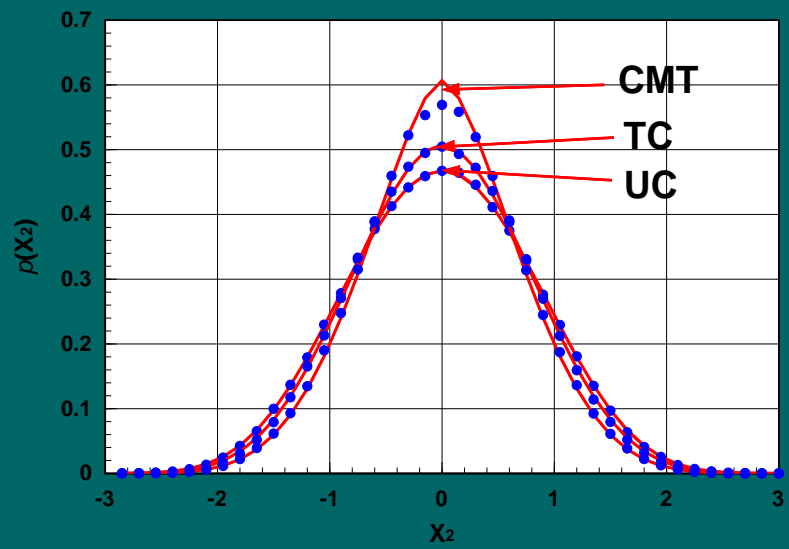
时滞 $\tau = 2$ 时改变控制力幅值的补偿方法位移的概率分布

UC:无控制力 CMA:改变控制力幅值进行时滞补偿

TC:时滞bang-bang反馈控制力



(a) X_1 的概率分布



(b) X_2 的概率分布

时滞 $\tau = 2$ 时改变时滞时间的补偿方法
位移的概率分布

UC:无控制力 CMT:改变时滞时间的补偿方法
TC:时滞bang-bang反馈控制力

5.3 拟可积哈密顿系统的最优时滞控制

考虑如下具有时滞控制的 n 自由度拟可积哈密顿系统

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} - \varepsilon c_{ij} \frac{\partial H'}{\partial P_j} + \varepsilon u_{i\tau} + \varepsilon^{1/2} f_{ik} W_k(t)\end{aligned}\quad (48)$$

首先，运用(41)式将时滞控制力 $u_{i\tau}$ 用非时滞的控制力 u_i 代替，运用随机平均法与动态规划原理，得到非时滞状态最优控制力

$$u_i^* = -\frac{1}{2} (\mathbf{R}^{-1})_{ij} \frac{\partial V}{\partial H_j} P_j \quad (49)$$

当受控系统有时滞时，式(44)中的 \mathbf{H} 和 \mathbf{P} 均被时滞状态变量 \mathbf{H}_τ 和 \mathbf{P}_τ 来代替，其控制效果会由于时滞的存在而变差。

根据关系式(41)，状态变量 \mathbf{P}_j 可用时滞状态变量的函数代替，得最优时滞控制力为

$$u_{i\tau}^*(\mathbf{Q}_\tau, \mathbf{P}_\tau) = -\frac{1}{2}(\mathbf{R}^{-1})_{ij} \frac{\partial V_\tau}{\partial H_{\tau j}} P_j(\mathbf{P}_\tau, \mathbf{Q}_\tau) \quad (50)$$

例：两个线性振子通过线性与非线性阻尼相耦合，具有时滞反馈控制。

受控系统方程

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 + c_{11}\dot{X}_1 + c_{12}\dot{X}_2 + b_1\dot{X}_1(X_1^2 + X_2^2) \\ + k_1X_1 = u_{1\tau} + e_1W_1(t) \\ \ddot{X}_2 + c_{21}\dot{X}_1 + c_{22}\dot{X}_2 + b_2\dot{X}_2(X_1^2 + X_2^2) \\ + k_2X_2 = u_{2\tau} + e_2W_2(t) \end{aligned} \quad (51)$$

研究上述最优时滞控制方法的有效性。

τ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$E[Q_1^2]_c$	0.151	0.160	0.167	0.175	0.180	0.187
$E[u_1^2]$	0.015	0.017	0.020	0.022	0.024	0.028
K_1	0.842	0.833	0.824	0.816	0.811	0.804
μ_1	5.503	4.813	4.163	3.677	3.323	2.902
$E[\tilde{Q}_1^2]_c$	0.151	0.152	0.153	0.163	unstable	
$E[\tilde{u}_1^2]$	0.015	0.018	0.022	0.031		
\tilde{K}_1	0.842	0.841	0.839	0.829		
$\tilde{\mu}_1$	5.503	4.723	3.832	2.691		
Note: $E[Q_1^2]_u = 0.953$						

最优时滞控制与不考虑时滞的控制策略的控制效果、控制效率与稳定性

6. 非线性随机最优控制的鲁棒性

- ✓ 在发展上述控制策略时，乃假定系统的参数为常数，随机激励也是完全已知的。
- ✓ 实际上，系统与激励模型及其参数不一定能准确代表实际情况，系统与激励在运行过程中也可能会发生变化，因此，必须考虑系统与随机激励的不确定性。
- ✓ 我们研究了含不确定系统参数与激励的拟哈密顿系统非线性随机最优控制的鲁棒性。

考虑如下具参数不确定性的受控的拟Hamilton系统

$$\begin{aligned}dQ_i &= \frac{\partial H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{s})}{\partial P_i} dt \\dP_i &= -\left[\frac{\partial H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{s})}{\partial Q_i} + m_{ij}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{s}) \frac{\partial H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{s})}{\partial P_j} - u_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P})\right] dt \\&\quad + \sigma_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{s}) dB_k(t)\end{aligned}\tag{52}$$

当不确定参数向量 \mathbf{s} 被其均值 $\bar{\mathbf{s}}$ 取代，式（52）称为名义系统。名义系统的等价Itô随机微分方程为

$$\begin{aligned}dQ_i &= \frac{\partial H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \bar{\mathbf{s}})}{\partial P_i} dt \\dP_i &= -\left[\frac{\partial H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \bar{\mathbf{s}})}{\partial Q_i} + m_{ij}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \bar{\mathbf{s}}) \frac{\partial H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \bar{\mathbf{s}})}{\partial P_j} - u_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P})\right] dt \\&\quad + \sigma_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \bar{\mathbf{s}}) dB_k(t)\end{aligned}\tag{53}$$

对名义系统和性能指标运用上述最优控制策略，得到如下最优控制力

$$u_i^* = -\frac{1}{2}(\mathbf{R}^{-1})_{ij} \frac{\partial H_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \bar{\mathbf{s}})}{\partial P_j} \frac{\partial V(\mathbf{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \bar{\mathbf{s}}))}{\partial H_r} \quad (54)$$

将最优控制力代入(52)式。然后便可得到受控系统(52)的响应统计量。

假设不确定参数 \mathbf{s} 具有高斯概率密度 $p(\mathbf{s})$ 。引进受控均方根响应、控制效果和控制效率的变差系数对不确定参数变差系数的敏感性作为鲁棒性评价指标，对非线性随机最优控制的鲁棒性进行分析。

例：考虑一个具不确定参数的受控的随机激励的杜芬振子

系统的运动方程为

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= P, \\ \dot{P} &= -aQ - bQ^3 - cP + u + e\xi(t)\end{aligned}$$

式中， a 为线性刚度； b 为非线性刚度； c 为阻尼系数； e 为激励幅值。它们均为具高斯分布的随机变量。

σ_a / \bar{a}	3%	6%	9%	12%	15%
$\sigma(\sqrt{E[Q^2]_c}) / m(\sqrt{E[Q^2]_c})$	1.18%	2.37%	3.57%	4.79%	5.99%
$m(K)$	0.6946	0.6944	0.6942	0.6939	0.6930
$\sigma(K) / m(K)$	0.34%	0.68%	1.02%	1.37%	1.73%
$m(\mu)$	0.6168	0.6167	0.6165	0.6163	0.6155
$\sigma(\mu) / m(\mu)$	0.32%	0.63%	0.96%	1.29%	1.61%

控制效果(K)和控制效率(μ)的均值(m), 以及受控均方根响应($\sqrt{E[Q^2]_c}$)、控制效果(K)和控制效率(μ)的变差系数(σ/μ)随不确定参数 a 的变差系数的变化

7. 不确定拟哈密顿系统的随机最优控制

7.1 响应最小为目标的极大极小控制

考虑如下受参数和外部扰动的受控的拟Hamilton系统

$$\begin{aligned}dQ_i &= \frac{\partial H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial P_i} dt \\dP_i &= -\left[\frac{\partial H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial Q_i} + (m_{ij}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \tilde{c}_{ij}(t)) \frac{\partial H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial P_j} - u_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \right. \\&\quad \left. + \tilde{s}_l(t) g_{il}(\mathbf{Q}) - \tilde{w}_i(t) \right] dt + \sigma_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) dB_k(t) \\i, j &= 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad l = 1, 2, \dots, p\end{aligned} \quad (55)$$

对于半无限时间区间上的遍历控制，性能指标取为如下形式

$$J(\tilde{s}_l, \tilde{c}_{ij}, \tilde{w}_i, u_i) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} L(\mathbf{H}(t), \langle \mathbf{u}(t) \rangle) dt \quad (56)$$

寻求最坏情况下最优控制的目标通过求解如下的随机微分对策问题实现

$$\min_{\mathbf{u}} \max_{\tilde{s}_l, \tilde{c}_{ij}, \tilde{w}_i} J(\tilde{s}_l, \tilde{c}_{ij}, \tilde{w}_i, u_i) \quad (57)$$

即

$$J(\tilde{s}_l, \tilde{c}_{ij}, \tilde{w}_i, u_i^*) \leq J(\tilde{s}_l^*, \tilde{c}_{ij}^*, \tilde{w}_i^*, u_i^*) \leq J(\tilde{s}_l^*, \tilde{c}_{ij}^*, \tilde{w}_i^*, u_i) \quad (58)$$

应用最优性原理得到Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) 方程如下

$$\begin{aligned} \gamma = \inf_{\mathbf{u}} \sup_{\tilde{s}_l, \tilde{c}_{ij}, \tilde{w}_i} \{ & L(\mathbf{H}, \langle \mathbf{u} \rangle) + [\bar{m}_r(\mathbf{H}) + \langle \frac{\partial H_r}{\partial P_i} (u_i - \tilde{s}_l(t) g_{il}(\mathbf{Q}) - \tilde{c}_{ij}(t) \frac{\partial H}{\partial P_j} + \tilde{w}_i(t)) \rangle] \frac{\partial V}{\partial H_r} \\ & + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{rk}(\mathbf{H}) \bar{\sigma}_{sk}(\mathbf{H}) \frac{\partial^2 V}{\partial H_r \partial H_s} \} \quad (59) \end{aligned}$$

最坏情况扰动由式 (59) 的右边对 $\tilde{c}_{ij}(t)$, $\tilde{s}_l(t)$ 和 $\tilde{w}_i(t)$ 取极大得到

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}_l^*(t) &= -s_l^0 \operatorname{sgn}\left[g_{il}(\mathbf{Q}) \frac{\partial H_r}{\partial p_i} \frac{\partial V}{\partial H_r}\right] \quad (\text{no summation with respect to } l) \\
 \tilde{c}_{ij}^*(t) &= -c_{ij}^0 \operatorname{sgn}\left[\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H_r}{\partial p_i} \frac{\partial V}{\partial H_r}\right] \quad (\text{no summation with respect to } i, j) \\
 \tilde{w}_i^*(t) &= w_i^0 \operatorname{sgn}\left[\frac{\partial H_r}{\partial p_i} \frac{\partial V}{\partial H_r}\right] \quad (\text{no summation with respect to } i)
 \end{aligned} \tag{60}$$

最优控制力为

$$u_i^* = -\frac{1}{2} (\mathbf{R}^{-1})_{ij} \frac{\partial H_r}{\partial p_j} \frac{\partial V}{\partial H_r} \tag{61}$$

将(60)与(61)代入方程(59), 求解最终HJI方程得到 $\partial V / \partial H_r$, 最终得到最坏扰动和相应的最优控制力的表达式。

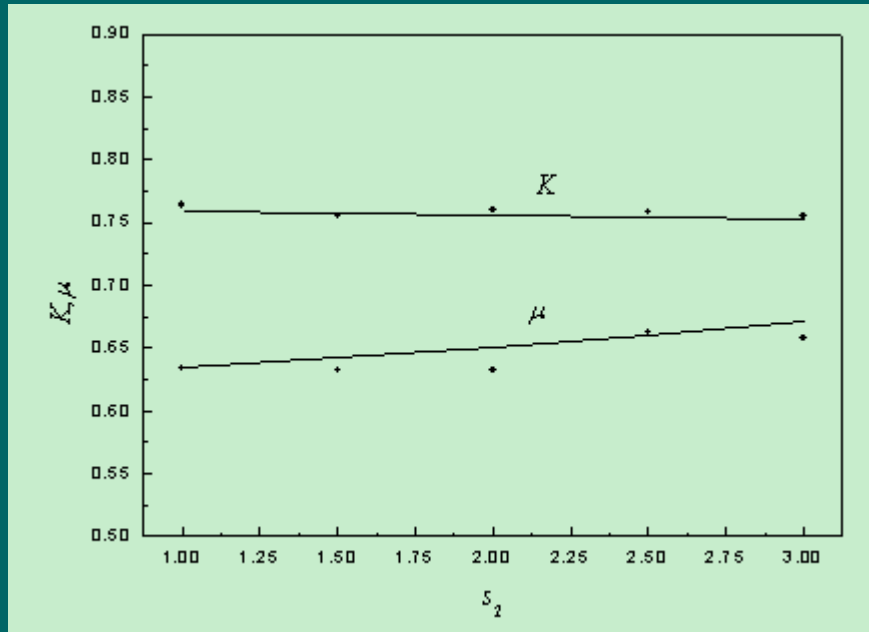
例：考虑一个受参数和外部扰动的受控的随机激励的杜芬振子，

其运动方程为

$$\dot{Q} = P,$$

$$\dot{P} = -[\bar{a} + \tilde{a}(t)]Q - [\bar{b} + \tilde{b}(t)]Q^3 - [\bar{c} + \tilde{c}(t)]P + u + e\xi(t) + \tilde{w}(t)$$

$\tilde{a}(t), \tilde{b}(t), \tilde{c}(t)$ 为参数扰动, $\tilde{w}(t)$ 为外部扰动



最坏情况最优控制的效果(K)和效率(μ)随控制参数 s_2 的变化

7.2 不确定拟哈密顿系统的反馈稳定化

考虑如下受参数扰动的受控的拟Hamilton系统

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial Q_i} - [\bar{c}_{ij}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \tilde{c}_{ij}(t)] \frac{\partial H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial P_j} + u_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + f_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \xi_k(t) - \tilde{s}_l(t) g_{il}(\mathbf{Q})\end{aligned}\quad (62)$$

对于半无限时间区间上的遍历控制，性能指标取为如下形式

$$J(\tilde{s}_l, \tilde{c}_{ij}, \tilde{w}_i, u_i) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} L(\mathbf{H}(t), \langle \mathbf{u}(t) \rangle) dt \quad (63)$$

式中 L 将由最大Lyapunov指数为最小确定。

运用最优性原理，得到最坏情况扰动

$$\begin{aligned}\tilde{s}_l^*(t) &= -s_l^0 \operatorname{sgn}\left[g_{il}(\mathbf{Q}) \frac{\partial H_r}{\partial p_i} \frac{\partial V}{\partial H_r}\right] \quad (\text{no summation with respect to } l) \\ \tilde{c}_{ij}^*(t) &= -c_{ij}^0 \operatorname{sgn}\left[\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H_r}{\partial p_i} \frac{\partial V}{\partial H_r}\right] \quad (\text{no summation with respect to } i, j)\end{aligned} \quad (64)$$

相应的最优控制力为

$$u_i^* = -\frac{1}{2} (\mathbf{R}^{-1})_{ij} \frac{\partial H_r}{\partial p_j} \frac{\partial V}{\partial H_r} \quad (65)$$

将(64)与(65)代入方程(62)，求解最终HJI方程得到 $\partial V / \partial H_r$ ，最终得到最坏扰动和相应的最优控制力的表达式。

最坏扰动下最优控制系统完全平均的系统运动方程为

$$dH_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = [\bar{m}_r^{worst}(\mathbf{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}))]dt + \bar{\sigma}_{rk}(\mathbf{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}))dB_k(t) \quad (66)$$

引入变换

$$\rho = \ln \bar{H}/2, \quad \alpha_r = H_r / \bar{H}, \quad \bar{H} = \sum_{r=1}^n H_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \quad (67)$$

得到关于 ρ 与 α 的方程

$$\begin{aligned} d\rho &= Q(\alpha)dt + \Sigma_k(\alpha)dB_k(t) \\ d\alpha_r &= m_r(\alpha)dt + \sigma_{rk}(\alpha)dB_k(t) \end{aligned} \quad (68)$$

最大Lyapunov指数表示为

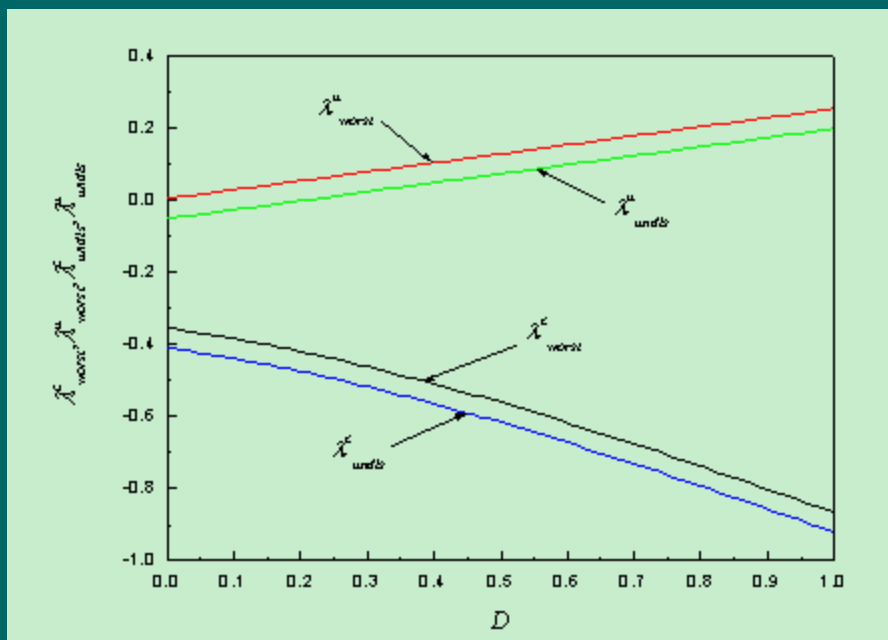
$$\lambda_1 = \int Q(\alpha) \mu(\alpha) d\alpha \quad (69)$$

选择函数 L 和最优控制力 \mathbf{u}^* 使得 λ_1 最小。

例、考虑一个受参数扰动的受控的参数（乘性）激励作用下的杜芬振子，其运动方程为

$$\dot{Q} = P,$$

$$\dot{P} = -[\bar{a} + \tilde{a}(t)]Q - [\bar{b} + \tilde{b}(t)]Q^3 - [\bar{c} + \tilde{c}(t)]P + u - \bar{a}Q\xi(t)$$



最大Lyapunov指数随激励强度D的变化

8、小结

- ✓ 在随机平均法和随机动态规划原理的基础上，发展了拟哈密顿系统的一系列非线性随机最优控制策略.
- ✓ 此类控制策略的优点：能应用于随机激励的多自由度强非线性系统；随机平均法使方程的维数降低并使得扩散矩阵非退化，简化了动态规划方程的求解；控制效果和效率比LQG法更好；该控制策略对系统不确定参数具有很好的鲁棒性.
- ✓ 为将这些控制策略应用于工程实际，还有很多的工作要做.

谢谢大家！